

# Interpolasi dalam Menentukan Orbit

Atika Firdaus / 13514009  
Program Studi Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
13514009@std.stei.itb.ac.id

**Abstract**—Dalam aljabar linier, terdapat suatu proses bernama interpolasi polinomial yang menghasilkan sebuah persamaan polinomial berderajat  $n$  dengan paling sedikit  $n+1$  buah titik data. Metode interpolasi polinomial ini ternyata dapat dikembangkan lebih jauh, tidak terpacu pada persamaan polinomial yang derajat sukunya menaik secara teratur. Makalah ini akan membahas pemanfaatan interpolasi dalam menentukan orbit dari benda angkasa yang mengelilingi Matahari.

**Keywords**—Elips, interpolasi, orbit, sistem persamaan linier.

## I. PENDAHULUAN

Aljabar geometri merupakan salah satu cabang ilmu yang penerapannya sangat luas. Dua pokok bahasan dalam ilmu aljabar geometri di antaranya adalah aljabar linier dan aljabar vektor. Kedua pokok bahasan ini sama-sama dapat diterapkan dalam bidang lain, salah satunya adalah bidang astronomi.

Seperti yang kita ketahui, Matahari merupakan pusat dari tata surya. Matahari dikelilingi planet-planet dan beberapa benda angkasa lain yang bergerak secara teratur mengelilinginya. Gerakan dari benda-benda angkasa ini membentuk suatu lintasan tetap berbentuk elips, sesuai dengan hukum Kepler pertama yang menyatakan “Setiap planet bergerak dengan lintasan elips, Matahari berada di salah satu fokusnya“. Jika tata surya kita misalkan sebagai sistem koordinat kartesian, Matahari dapat kita umpamakan sebagai titik  $(0, 0)$  dan lintasan tetap (orbit) dari benda-benda angkasa di sekeliling Matahari dapat kita gambarkan sebagai kurva berbentuk elips.

Dengan memanfaatkan interpolasi polinomial dan metode eliminasi Gauss, kita dapat menentukan persamaan kurva dari orbit-orbit yang ada di tata surya.

## II. LANDASAN TEORI

### DEFINISI MATRIKS

Matriks adalah sekumpulan bilangan dan/atau variabel dalam bentuk segiempat yang tersusun dalam bentuk baris dan kolom. Misal suatu matriks  $A$ , notasi matriks  $A$  dituliskan dalam bentuk:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$  untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  disebut unsur/entri/elemen matriks yang terletak pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ . Ukuran atau orde matriks merupakan jumlah baris kali jumlah kolom. Maka, matriks  $A$  pada contoh di atas memiliki orde  $m \times n$ . Ketika semua elemen matriks adalah nol, maka matriks tersebut disebut matriks nol. Dua matriks dikatakan sama ketika memiliki orde yang sama dan elemen matriks yang seletak pada kedua matriks tersebut adalah sama.

Terdapat beberapa jenis matriks dasar yang harus diketahui, yaitu:

#### 1. Matriks Persegi

Sama dengan definisi persegi yang kedua sisinya sama panjang, matriks persegi merupakan matriks yang besar baris dan kolomnya sama, dalam kata lain berorde  $m \times m$ .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$B$  adalah matriks persegi dengan orde  $3 \times 3$ .

#### 2. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang elemen selain elemen diagonalnya adalah nol. Elemen diagonal adalah  $a_{ij}$  dengan  $i = j$ . Ketika semua elemen diagonal dalam matriks diagonal adalah satu, maka matriks tersebut adalah matriks identitas.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C$  adalah matriks diagonal berukuran  $3 \times 3$ , sedangkan  $I$  adalah matriks identitas berukuran  $3 \times 3$ .

#### 3. Matriks Segitiga

Terdapat dua macam matriks segitiga, yaitu matriks

segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang semua elemen di bawah elemen diagonalnya adalah nol. Sedangkan, matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang semua elemen di atas elemen diagonalnya adalah 0.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$D$  adalah matriks segitiga atas, dan  $E$  adalah matriks segitiga bawah.

#### 4. Matriks Transpos

Matriks transpos dari  $F$ , disebut  $F^T$ , diperoleh dengan mengubah elemen baris pada  $F$  menjadi elemen kolom, dan sebaliknya.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

#### 5. Matriks Simetri

Suatu matriks  $A$  dikatakan matriks simetri ketika  $A = A^T$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$G$  merupakan matriks simetri.

### OPERASI PADA MATRIKS

Pada matriks, terdapat beberapa operasi yang berlaku baik operasi antara skalar dengan matriks maupun operasi antarmatriks.

#### 1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Untuk melakukan penjumlahan dan pengurangan matriks, syarat yang harus dipenuhi adalah ukuran matriks adalah sama. Penjumlahan dan pengurangan matriks akan menghasilkan matriks berukuran sama dengan kedua matriks yang dioperasikan. Misal, kita akan menjumlahkan matriks  $A$  dengan elemen  $a_{ij}$  dan matriks  $B$  dengan elemen  $b_{ij}$ , maka:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Begitu pula dengan pengurangan matriks  $A$  dan matriks  $B$ , maka:

$$(A - B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+0 \\ 0+3 & 1+1 & 2+0 \\ 0+2 & 0+3 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-0 & 3-0 \\ 0-3 & 1-1 & 2-0 \\ 0-2 & 0-3 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

#### 2. Perkalian pada Matriks

Terdapat dua jenis operasi perkalian pada matriks, yaitu perkalian suatu matriks dengan skalar dan perkalian suatu matriks dengan matriks yang lain. Perkalian matriks dengan skalar akan menghasilkan matriks berukuran sama dengan setiap elemennya merupakan hasil kali elemen matriks awal dengan skalar pengalinya.

Misal,  $k$  adalah bilangan riil dan

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \text{ maka } kA = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{pmatrix}, \text{ atau}$$

$$(kA)_{ij} = ka_{ij}$$

Untuk perkalian antara dua matriks, terdapat beberapa hal yang harus dipenuhi agar perkalian dapat dilakukan. Misalkan,  $A$  adalah matriks berorde  $m \times n$ , dan  $B$  adalah matriks berorde  $p \times q$ , maka

- $A \times B$  dapat dilakukan jika  $n = p$ , dan perkalian akan menghasilkan matriks berorde  $m \times q$ ,
- $B \times A$  dapat dilakukan jika  $q = m$ , dan perkalian akan menghasilkan matriks berorde  $p \times n$ .

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} pa + qc + re & pb + qd + rf \\ sa + tc + ue & sb + td + uf \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} ap + bs & aq + bt & ar + bu \\ cp + ds & cq + dt & cr + du \\ ep + fs & eq + ft & er + fu \end{pmatrix}$$

Dalam perkalian antarmatriks,  $A \times B$  belum tentu sama dengan  $B \times A$ . Jika  $A, B$ , dan  $C$  adalah matriks berukuran sama dan  $x, y$  adalah bilangan riil, maka

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $x(A + B) = xA + xB$
- $(x + y)A = xA + yA$
- $A(xB) = x(AB)$

## OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

Selain operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks, terdapat operasi baris elementer yang kemudian disingkat OBE. OBE adalah proses aritmatika (penjumlahan dan perkalian) pada seluruh elemen dalam baris tertentu suatu matriks. OBE dapat berbentuk:

1. Pertukaran baris
2. Perkalian baris dengan konstanta bukan nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta bukan nol dengan baris yang lain

Sebelum memahami OBE lebih jauh, terdapat beberapa istilah yang harus dipahami terkait dengan OBE. Misal  $A$  adalah sebuah matriks dengan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a. Bilangan 1 pada baris pertama kolom pertama dinamakan satu utama
- b. Bilangan 2 pada kolom ketiga dinamakan unsur pertama tak nol dari baris kedua
- c. Baris pertama dan kedua dinamakan baris tak nol, karena unsur-unsur pada kedua baris tidak semuanya nol
- d. Baris ketiga dinamakan baris nol karena semua unsur pada baris ketiga adalah nol

Tujuan dilakukan operasi baris elementer pada suatu matriks adalah untuk menghasilkan matriks dengan sifat-sifat berikut:

1. Pada baris tak nol, maka unsur tak nol pertama adalah 1 yang kemudian disebut 1 utama.
2. Pada baris yang berurutan, posisi 1 utama pada baris yang lebih rendah terletak lebih kanan daripada 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
3. Jika ada baris nol, maka diletakkan di baris paling bawah.
4. Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol.

Jika sifat-sifat pada butir 1, 2, dan 3 terpenuhi, maka matriks yang terbentuk dari OBE disebut matriks eselon dan prosesnya dinamakan eliminasi Gauss. Sementara itu, jika semua sifat pada butir-butir di atas terpenuhi, maka matriks yang terbentuk dari OBE disebut matriks eselon tereduksi dan prosesnya dinamakan eliminasi Gauss-Jordan.

Contoh:

Tentukan matriks eselon dan matriks eselon tereduksi dari matriks  $A$  berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b_2 \leftrightarrow b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$b_3 - 2b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ Matriks eselon}$$

$$b_2 - b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b_1 + b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ Matriks eselon tereduksi}$$

## MATRIKS INVERS

Misalkan,  $A$  dan  $B$  adalah matriks persegi dengan ukuran sama dan  $I$  adalah matriks identitas. Jika  $A \times B = I$ , maka  $B$  dinamakan invers dari matriks  $A$  (sebaliknya,  $A$  merupakan invers dari matriks  $B$ ). Notasi bahwa  $B$  merupakan matriks invers dari  $A$  adalah  $B = A^{-1}$ , dan sebaliknya  $A = B^{-1}$ .

Cara dalam penentuan matriks invers dari suatu matriks dapat dilakukan melalui OBE, yaitu:

$$(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$$

Matriks  $A$  pada ruas kiri dikenakan OBE secara bersamaan dengan matriks identitas pada ruas kanan sehingga matriks  $A$  menjadi matriks identitas, sementara itu matriks identitas menjadi suatu matriks invers dari  $A$ . Jika pada proses OBE ditemukan baris nol pada matriks ruas kiri maka  $A$  dikatakan tidak mempunyai invers. Matriks yang tidak mempunyai invers dinamakan matriks singular.

Beberapa sifat matriks invers yang perlu diketahui adalah:

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$
2. Jika  $A$  dan  $B$  memiliki invers, maka  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. Misal  $k$  adalah bilangan riil bukan nol, maka  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$
4. Akibat dari sifat 2, maka  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Contoh:

Tentukan matriks invers (jika ada) dari matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$b_3 + 2b_1 \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$b_2 - 3b_1 \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$-b_2 \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$b_2 - b_3 \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$b_1 - b_2 \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Jadi, } A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

### SISTEM PERSAMAAN LANJAR DALAM BENTUK MATRIKS

Persamaan linier merupakan sebuah persamaan aljabar yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian antara konstanta dengan variabel tunggal. Persamaan dikatakan linier sebab hubungan matematisnya dapat digambarkan sebagai garis lurus dalam sistem koordinat kartesius.

Sistem persamaan linier adalah sistem yang terdiri dari dua atau lebih persamaan linier. Bentuk dari sistem persamaan linier adalah:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

dengan  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}, b_1, b_2, \dots, b_m$  merupakan konstanta. Bentuk sistem persamaan linier di atas berarti terdapat  $m$  persamaan dengan  $n$  tak diketahui (*unknowns*) ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), dengan tiap persamaan bersifat linier terhadap  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Dalam menyelesaikan SPL, terdapat dua cara yang dapat digunakan, yaitu mengeliminasi *unknowns* satu-persatu dari persamaan yang ada, atau mengubah persamaan-persamaan ke dalam bentuk matriks kemudian menerapkan OBE.

Misalkan, kita mempunyai sebuah SPL dengan

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

kita dapat mengubahnya ke dalam bentuk  $Ax = y$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A, x,$  dan  $y$  disebut koefisien matriks.

Namun, terdapat bentuk lain dalam merepresentasikan SPL ke dalam matriks, yang disebut matriks perluasan. Alih-alih menuliskan dalam bentuk  $A, x,$  dan  $y,$  kita dapat menghilangkan variabel  $x$  dan  $y$  dari persamaan matriks dan menuliskan sebuah matriks di mana koefisien dari variabel  $x$  diletakkan pada kolom pertama, koefisien dari variabel  $y$  diletakkan pada kolom kedua, dan sisi kanan dari persamaan linier diletakkan pada kolom ketiga.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Terdapat tiga kemungkinan hasil penyelesaian dari SPL:

1. Solusi tunggal, selain nilai  $x_1, x_2, \dots, x_n$  yang diperoleh, tidak ada nilai lain yang memenuhi persamaan.
2. Banyak solusi, terdapat banyak kemungkinan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  yang memenuhi  $m$  persamaan. SPL yang memiliki solusi baik banyak solusi maupun solusi tunggal disebut konsisten
3. Tidak ada solusi, nilai  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tidak memenuhi  $m$  persamaan. Jika terdapat SPL yang tidak memiliki solusi, maka SPL tersebut dikatakan tidak konsisten.

Ketika menyelesaikan SPL dengan matriks perluasan menggunakan OBE, terdapat beberapa ciri-ciri matriks yang menandakan kondisi solusi dari SPL yang sedang diselesaikan.

1. Solusi Tunggal

SPL yang memiliki solusi tunggal matriks perluasannya akan menghasilkan sebuah matriks segitiga atas tanpa baris nol di dalamnya setelah proses eliminasi Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solusi:  $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 1$

2. Banyak Solusi

SPL yang memiliki banyak solusi matriks perluasannya akan menghasilkan sebuah matriks dengan baris nol di dalamnya setelah proses eliminasi Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pada baris ketiga terdapat baris 0, persamaannya berbentuk  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$  yang dipenuhi oleh banyak nilai  $x$ .

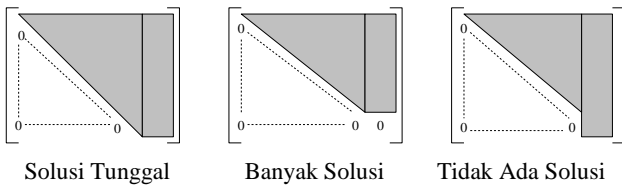
3. Tidak Ada Solusi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pada baris terakhir, persamaan yang terbentuk

adalah  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$  yang dalam hal ini tidak ada nilai  $x$  yang memenuhi.

Bentuk akhir matriks perluasan setelah eliminasi Gauss dari ketiga kemungkinan solusi dapat digambarkan sebagai berikut:



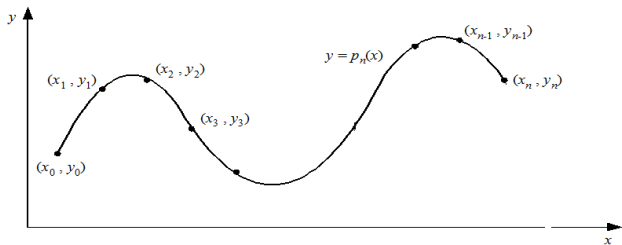
### INTERPOLASI

Salah satu masalah yang sering dihadapi adalah untuk menemukan polinomial yang grafiknya melewati serangkaian titik tertentu dalam bidang; hal ini disebut polinomial interpolasi.

**Teorema.** *Given any  $n$  points in the  $xy$ -plane that have distinct  $x$ -coordinates, there is a unique polynomial of degree  $n-1$  or less whose graph passes through those points.*

Polinom interpolasi derajat  $n$  yang menginterpolasi titik-titik  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  adalah

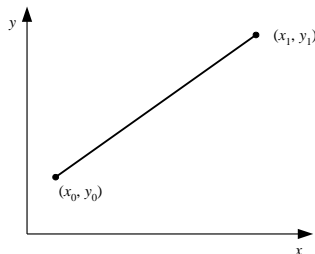
$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$



#### 1. Interpolasi Lajur

Interpolasi lajur adalah interpolasi dua buah titik yang diketahui pada bidang  $xy$  dengan sebuah garis lurus. Misalkan, diberikan dua buah titik yaitu  $(x_0, y_0)$  dan  $(x_1, y_1)$ , polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah

$$p_1(x) = a_0 + a_1x$$



Selesaikan SPL  
 $y_0 = a_0 + a_1x_0$   
 $y_1 = a_0 + a_1x_1$   
 dengan metode eliminasi Gauss untuk memperoleh nilai  $a_0$  dan  $a_1$

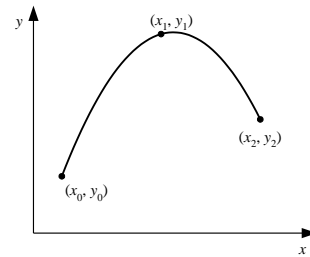
#### 2. Interpolasi Kuadrat

Misalkan, diberikan tiga buah titik data,  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ , dan  $(x_2, y_2)$ , polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Bila digambar, kurva polinom kuadrat berbentuk

parabola.



Polinom  $p_2(x)$  ditentukan dengan cara berikut:

- Sulihkan  $(x_i, y_i)$  ke dalam persamaan  $p_2(x)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Dari sini diperoleh tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui, yaitu  $a_0, a_1$ , dan  $a_2$ :

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$

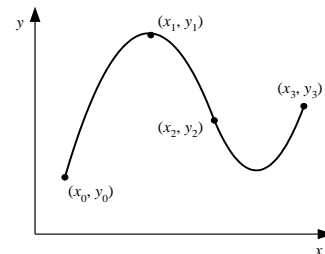
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

- Selesaikan SPL di atas menggunakan metode eliminasi Gauss sehingga dihasilkan  $a_0, a_1$ , dan  $a_2$ .

#### 3. Interpolasi Kubik

Misalkan, diberikan empat buah titik data,  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , dan  $(x_3, y_3)$ , polinom yang menginterpolasi keempat buah titik itu adalah polinom kubik yang berbentuk:

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$



Polinom  $p_3(x)$  ditentukan dengan cara berikut:

- Sulihkan  $(x_i, y_i)$  ke dalam persamaan polinom di atas,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Dari sini, diperoleh empat buah persamaan dengan empat buah parameter yang tidak diketahui, yaitu  $a_0, a_1, a_2$ , dan  $a_3$ :

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$$

$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$$

- Selesaikan SPL di atas menggunakan metode eliminasi Gauss sehingga dihasilkan  $a_0, a_1, a_2$ , dan  $a_3$ .

Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat  $n$  untuk  $n$  yang lebih tinggi:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

asalkan tersedia  $(n+1)$  buah titik data.

Dengan menyulihkan  $(x_i, y_i)$  ke dalam persamaan polinom di atas  $y = p_n(x)$  untuk  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , akan diperoleh  $n$  buah sistem persamaan linier dalam  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ,

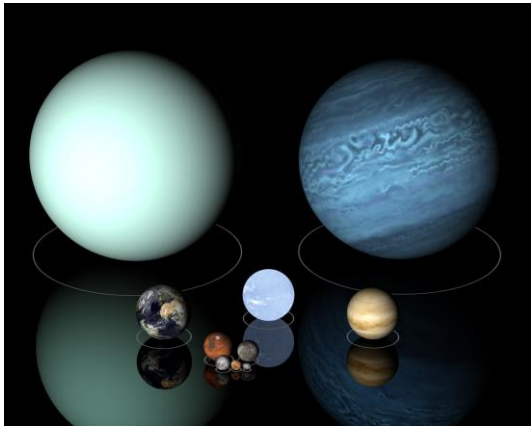
$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0$$

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^3 &= y_1 \\
 a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^3 &= y_2 \\
 &\dots \\
 a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^3 &= y_n
 \end{aligned}$$

Solusi sistem persamaan linier ini diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

### III. MENENTUKAN ORBIT DENGAN INTERPOLASI

Planet merupakan benda angkasa yang mengorbit sebuah bintang atau sebuah bintang, atau sisa bintang yang cukup besar untuk memiliki gravitasi sendiri.



Sumber:

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3e/1e7m\\_comparison\\_Uranus\\_Neptune\\_Sirius\\_B\\_Earth\\_Venus.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3e/1e7m_comparison_Uranus_Neptune_Sirius_B_Earth_Venus.png)

Di tata surya, semua planet mengorbit Matahari dengan arah yang sama seperti rotasi Matahari, yaitu berlawanan arah jarum jam dilihat dari kutub utaranya. Gerakan planet mengelilingi Matahari merupakan gerakan yang teratur, pada lintasan yang sama. Hal ini berdasarkan pada salah satu dari tiga hukum Kepler. Menurut hukum pertama Kepler, setiap planet bergerak dengan lintasan elips. Matahari berada di salah satu fokusnya. Lintasan elips yang dimaksud pada hukum Kepler kemudian disebut orbit.



Sumber:

<https://shobru.files.wordpress.com/2009/03/panel6solarsystem.jpg>

Dalam sistem tata surya, matahari merupakan pusat dari segala perputaran planet-planet. Planet-planet ini berputar mengelilingi matahari dalam orbitnya yang berbentuk elips. Jika kita misalkan sistem tata surya sebagai bidang kartesius, maka matahari dapat kita jadikan sebagai titik (0, 0) dan orbit dari planet-planet dapat digambarkan sebagai kurva berbentuk elips.

Faktanya, interpolasi tidak hanya dapat diterapkan pada polinom yang derajatnya menaik secara teratur. Metode yang digunakan dalam interpolasi juga dapat menyelesaikan permasalahan serupa seperti pada persamaan lingkaran atau persamaan irisan kerucut (parabola, hiperbola, elips, dan bentuk-bentuk turunan lainnya). Maka, persamaan orbit dari planet tertentu dapat ditentukan dengan interpolasi.

Persamaan umum irisan kerucut berbentuk:

$$a_0 + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y = 0$$

Untuk mendapatkan solusi dari  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$  dan  $a_6$  dibutuhkan paling sedikit 5 titik data. Misalkan, data yang didapat adalah 5 titik  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),$  dan  $(x_4, y_4),$  maka akan terbentuk SPL:

$$\begin{aligned}
 a_0 + a_1x_0^2 + a_2x_0y_0 + a_3y_0^2 + a_4x_0 + a_5y_0 &= 0 \\
 a_0 + a_1x_1^2 + a_2x_1y_1 + a_3y_1^2 + a_4x_1 + a_5y_1 &= 0 \\
 a_0 + a_1x_2^2 + a_2x_2y_2 + a_3y_2^2 + a_4x_2 + a_5y_2 &= 0 \\
 a_0 + a_1x_3^2 + a_2x_3y_3 + a_3y_3^2 + a_4x_3 + a_5y_3 &= 0 \\
 a_0 + a_1x_4^2 + a_2x_4y_4 + a_3y_4^2 + a_4x_4 + a_5y_4 &= 0
 \end{aligned}$$

SPL ini kemudian kita ubah ke dalam bentuk matriks perluasan, menjadi:

$$\begin{pmatrix}
 1 & x^2 & xy & y^2 & x & y & 0 \\
 1 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 & x_0 & y_0 & 0 \\
 1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 0 \\
 1 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 0 \\
 1 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 0 \\
 1 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 0
 \end{pmatrix}$$

Tahap selanjutnya adalah menyelesaikan SPL dalam bentuk matriks perluasan tersebut menggunakan metode eliminasi Gauss untuk mendapat nilai dari  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,$  dan  $a_5.$

Contoh:

Seorang astronom melakukan pengamatan terhadap asteroid (benda angkasa dengan karakteristik menyerupai planet tetapi ukurannya lebih kecil, juga memiliki orbit) dalam lima waktu yang berbeda. Astronom tersebut mencatat lima titik berbeda yang menunjukkan posisi asteroid:

$(8,03; 8,31), (10,17; 6,36), (11,20; 3,21), (10,74; 0,38), (9,09; -2,23)$

Persamaan orbit dari asteroid tersebut dapat ditentukan dengan melakukan interpolasi terhadap lima titik data yang dimiliki. Pertama-tama, ubah kelima titik data ke dalam bentuk persamaan linier.

$$\begin{aligned}
 a_0 + 64,48a_1 + 66,73a_2 + 69,06a_3 + 8,03a_4 + 8,31a_5 &= 0 \\
 a_0 + 103,43a_1 + 64,68a_2 + 40,45a_3 + 10,17a_4 + 6,36a_5 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_0 + 125,44a_1 + 35,95a_2 + 10,30a_3 + 11,20a_4 + 3,21a_5 &= 0 \\
 a_0 + 115,35a_1 + 4,08a_2 + 0,14a_3 + 10,74a_4 + 0,38a_5 &= 0 \\
 a_0 + 82,63a_1 - 20,27a_2 + 4,97a_3 + 9,09a_4 - 2,23a_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Kemudian, ubah SPL di atas ke dalam bentuk matriks perluasan.

$$\left( \begin{array}{cccccc|c}
 1 & x^2 & xy & y^2 & x & y & 0 \\
 1 & 64,48 & 66,73 & 69,06 & 8,03 & 8,31 & 0 \\
 1 & 103,43 & 64,68 & 40,45 & 10,17 & 6,36 & 0 \\
 1 & 125,44 & 35,95 & 10,30 & 11,20 & 3,21 & 0 \\
 1 & 115,35 & 4,08 & 0,14 & 10,74 & 0,38 & 0 \\
 1 & 82,63 & -20,27 & 4,97 & 9,09 & -2,23 & 0
 \end{array} \right)$$

Langkah berikutnya adalah menyelesaikan SPL di atas menggunakan metode eliminasi Gauss atau eliminasi Gauss-Jordan sehingga didapat koefisien dari masing-masing suku yaitu  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,$  dan  $a_5$ .

## V. KESIMPULAN

Aljabar geometri merupakan cabang ilmu yang penerapannya sangat luas dan tidak terbatas. Salah satu terapannya adalah dalam mencari persamaan orbit (lintasan gerak) dari benda angkasa seperti planet dan asteroid.

Dalam penghitungannya, metode yang digunakan adalah interpolasi lima titik, yang berarti dibutuhkan paling sedikit lima titik data yang berbeda mengenai posisi benda angkasa terkait. Misalkan, lima titik data tersebut adalah  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),$  dan  $(x_4, y_4)$ , maka lima titik ini disulihkan ke dalam sistem persamaan linier (SPL):

$$\begin{aligned}
 a_1x_0^2 + a_2x_0y_0 + a_3y_0^2 + a_4x_0 + a_5y_0 + a_6 &= 0 \\
 a_1x_1^2 + a_2x_1y_1 + a_3y_1^2 + a_4x_1 + a_5y_1 + a_6 &= 0 \\
 a_1x_2^2 + a_2x_2y_2 + a_3y_2^2 + a_4x_2 + a_5y_2 + a_6 &= 0 \\
 a_1x_3^2 + a_2x_3y_3 + a_3y_3^2 + a_4x_3 + a_5y_3 + a_6 &= 0 \\
 a_1x_4^2 + a_2x_4y_4 + a_3y_4^2 + a_4x_4 + a_5y_4 + a_6 &= 0
 \end{aligned}$$

## VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Puji syukur kehadiran Allah SWT, karena atas limpahan rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan makalah ini tepat waktu. Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pengajar mata kuliah IF2123 Aljabar Geometri, Dr. Ir. Rinaldi Munir, MT dan Drs. Judhi Santoso, M.Sc yang telah memberikan ilmunya kepada saya dan teman-teman mengenai Aljabar Geometri yang menjadi dasar pengetahuan dalam pembuatan tugas makalah ini. Dan kepada orang-orang di sekitar saya yang tidak dapat saya sebutkan satu-persatu, terima kasih atas dukungan yang diberikan kepada saya selama proses pembuatan makalah ini.

## REFERENSI

- [1] Adiwijaya. *Diktat Aljabar Linear Elementer*.
- [2] Anton, Howard, dan Chris Rorres. 2010. *Elementary Linear Algebra* 10<sup>th</sup> Ed. John Wiley & Sons, Inc.

- [3] Barnett, R.A., M.R. Ziegler, dan K.E. Byleen. 2008. *College Mathematics for Business, Economics, Life Sciences and the Social Sciences* 11<sup>th</sup> Ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson.
- [4] E. Lerner, David. 2007. *Lecture Notes on Linear Algebra*. Department of Mathematics, University of Kansas.
- [5] IAU 2006 General Assembly: Result of the IAU Resolution <http://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau0603> / diakses pada tanggal 16 Desember 2015 pukul 06.15 WIB.
- [6] Murray dan Dermott. 1999. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.
- [7] Sistem Persamaan Linear. <http://uyuhan.com/matematika/sistem-persamaan/sistem-persamaan-linear.php> diakses pada tanggal 15 Desember 2015 pukul 17.36 WIB.
- [8] Slide Bahan Kuliah IF2123 oleh Rinaldi Munir. <http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2015-2016/algeo15-16.htm#SlideKuliah> diakses pada tanggal 15 Desember 2015 pukul 13.15 WIB.
- [9] Wiryanto, L. Hari. *Diktat Sistem Persamaan Linear dan Matrik*.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2015



Atika Firdaus  
13514009