

Matriks Sebagai Representasi Orientasi Objek 3D

Cendhika Imantoro - 13514037

Program Studi Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia

cendhikaimantoro@s.itb.ac.id

Abstract—Sebagian konsep 3D yang dipahami manusia tidak bisa dipahami secara langsung oleh computer. Dalam pengelolaan objek 3D pada komputer, Hal-hal terkait objek tersebut harus dinyatakan terlebih dahulu dalam representasi yang dapat dipahami computer. Salah satunya adalah orientasi benda. Manusia bisa memahami orientasi benda hanya dengan melihat benda tersebut. Namun computer tidak bisa melakukan hal yang sama. Agar computer memahami apa yang dimaksud dengan orientasi objek, orientasi harus disajikan dalam bentuk yang mudah dipahami computer. Salah satu bentuk yang dapat dipahami computer adalah matriks. Makalah ini membahas representasi orientasi objek dalam matriks dan pengolahannya.

Keywords— matriks, orientasi, rotasi, sumbu global, sumbu local, vektor.

I. PENDAHULUAN

Objek yang ditampilkan layar computer merupakan objek yang tidak memiliki dimensi ruang. Namun, seiring berkembangnya teknologi, computer mampu membuat objek yang ditampilkan mampu memberikan kesan seolah memiliki volume. Meskipun computer tidak kenal dengan konsep wujud fisik, computer mampu membuat tampilan yang menyerupai itu. Tentunya computer tidak bekerja dengan benda fisik secara langsung, melainkan mengolah apa yang merepresentasikan benda fisik tersebut.

Benda fisik memiliki banyak komponen. Komponen yang bisa diterima melalui visual meliputi bentuk, warna, posisi, orientasi, dan lain-lain.

Orientasi, yang merupakan salah satu dari komponen tersebut, memiliki lebih dari satu kemungkinan representasi. Yang sering digunakan adalah quaternion. Representasi quaternion muncul setelah terjadi berbagai pengembangan terhadap representasi orientasi untuk menutupi kekurangan representasi sebelumnya. Hal ini menyebabkan quaternion cukup sulit dipahami.

Dibanding quaternion, vektor merupakan hal yang umumnya dipelajari lebih dahulu. Selain itu, vektor merupakan hal yang dapat diamati secara langsung. Oleh karena itu, vektor cenderung lebih mudah dipelajari dan dipahami.

Orientasi pada dasarnya bisa dianggap sebagai “arah menghadap” dari suatu objek. Oleh karena itu, vektor dapat dijadikan representasi dari orientasi. Namun, computer tidak dapat mengolah vektor secara langsung. Vektor harus

diubah ke bentuk yang dapat dipahami computer terlebih dahulu. Salah satu bentuk yang mudah dipahami computer adalah matriks.

II. RUANG VEKTOR DAN TRANSFORMASI LANJAR

Ruang vektor adalah himpunan yang memiliki anggota berupa kumpulan elemen dan memenuhi sifat berikut

1. Memiliki operasi antar elemen
2. Memiliki identitas untuk operasi
3. Closure (Hasil operasi antar elemen merupakan anggota ruang vektor itu sendiri)
4. Komutatif penjumlahan
5. Asosiatif
6. Distributif

Transformasi linier adalah fungsi yang memiliki daerah asal sebuah ruang vektor dan dipetakan ke ruang vektor pula, baik ruang vektor tersebut sama ataupun berbeda. Pada transformasi linier $f(u)$ berlaku

1. Jika $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dan $v = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ anggota ruang vektor domain, maka

$$f(u) + f(v) = f(u + v)$$

2. Jika $u = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ anggota ruang vektor domain dan k konstanta maka

$$f(ku) = k f(u)$$

Transformasi linier pada domain matriks bisa dinyatakan sebagai perkalian matriks antara matriks transformasi dengan matriks domain.

III. REPRESENTASI ORIENTASI DENGAN TIGA VEKTOR

A. Penggunaan Tuple Tiga Vektor untuk Representasi Orientasi

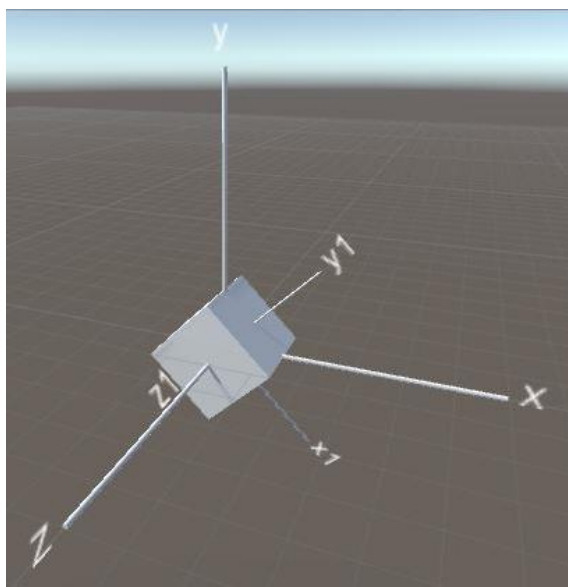
Objek yang akan direpresentasikan orientasinya adalah objek dimensi tiga, oleh karena itu sumbu yang terkait dalam hal ini hanya tiga sumbu. Ide dasar dari representasi orientasi menggunakan vektor adalah dengan membandingkan sumbu global dan sumbu local objek.

Karena sumbu yang dimiliki hanya tiga, maka banyak vektor paling banyak yang dibutuhkan untuk merepresentasikan orientasi objek adalah sebanyak tiga vektor.

Dalam representasi ini, orientasi vektor diperoleh dengan membandingkan ketiga sumbu local objek dan ketiga sumbu global. Hasil perbandingan ini dinyatakan dalam tuple berisi tiga vektor berbentuk $\langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) \rangle$ dengan (a_1, b_1, c_1) merepresentasikan perbandingan sumbu x, (a_2, b_2, c_2) merepresentasikan perbandingan sumbu y, (a_3, b_3, c_3) merepresentasikan perbandingan sumbu z.

Implementasi representasi ini yaitu jika perbandingan sumbu direpresentasikan dengan (a,b,c) , itu berarti sumbu local yang dibandingkan searah dengan vektor (a,b,c) pada sumbu global.

Misal jika suatu orientasi direpresentasikan dengan $\langle (1,-1,0), (0,1,1), (0,0,1) \rangle$, itu berarti pada orientasinya sumbu x local objek searah dengan vektor $(1,-1,0)$ sumbu global, sumbu y local objek searah dengan vektor $(0,1,1)$ sumbu global, dan sumbu z local objek searah dengan vektor $(0,0,1)$ sumbu global



Gambar 1 orientasi $\langle (1,-1,0), (0,1,1), (0,0,1) \rangle$

Karena dalam representasi ini panjang vector tidak dipertimbangkan, maka orientasi yang direpresentasikan $\langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) \rangle$ akan sama dengan $\langle k_1(a_1, b_1, c_1), k_2(a_2, b_2, c_2), k_3(a_3, b_3, c_3) \rangle$ untuk tiap k_1, k_2, k_3 konstanta positif.

Meskipun tiap orientasi bisa direpresentasikan dengan banyak tuple, tiap tuple paling banyak merepresentasikan satu buah orientasi. Oleh karena itu, metode representasi ini memungkinkan untuk menjadi representasi orientasi. Jika metode representasi yang dibutuhkan harus memenuhi syarat “setiap orientasi hanya boleh memiliki satu representasi”, yang perlu dilakukan adalah mengubah sedikit metode ini dengan menambahkan aturan “hasil representasi adalah tuple (v_1, v_2, v_3) dengan v_1, v_2, v_3

merupakan vektor satuan”.

Pada metode representasi ini, tidak semua tuple berisi tiga vektor merupakan representasi dari suatu orientasi. Karena representasi ini memanfaatkan arah vektor, tuple yang mengandung $(0,0,0)$ tidak bisa merepresentasikan orientasi karena arah dari vektor $(0,0,0)$ tidak terdefinisi dengan jelas.

Selain itu, sumbu pada dimensi tiga semuanya saling tegak lurus. Karena vektor pada merepresentasikan arah ketiga sumbu local objek, maka tuple yang merepresentasikan orientasi harus berisi tiga buah vektor yang saling tegak lurus. Oleh karena itu, berdasarkan dot product, untuk tiap tuple $t = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, jika t merupakan representasi dari orientasi objek, maka berlaku

$$v_1 \cdot v_2 = 0$$

$$v_2 \cdot v_3 = 0$$

$$v_3 \cdot v_1 = 0$$

Syarat sebuah tuple tiga vektor untuk menjadi representasi orientasi tidak hanya itu. Aturan cross product juga harus berlaku. berdasarkan cross product, untuk tiap tuple $t = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, jika t merupakan representasi dari orientasi objek, maka berlaku

$$v_1 \times v_2 = k_1 v_3$$

$$v_2 \times v_3 = k_2 v_1$$

$$v_3 \times v_1 = k_3 v_2$$

$$k_1, k_2, k_3 > 0$$

Jika kedua syarat tersebut dipenuhi tuple t , baru dapat disimpulkan bahwa t merupakan representasi dari orientasi sebuah objek.

B. Penggunaan Tuple Dua Vektor untuk Representasi Orientasi

Meskipun objek yang direpresentasikan orientasinya adalah objek dimensi tiga, bukan berarti representasi dari orientasinya harus berisi tiga buah vektor. Ada kemungkinan dengan jumlah vektor kurang dari tiga, orientasi objek dimensi tiga masih dapat direpresentasikan.

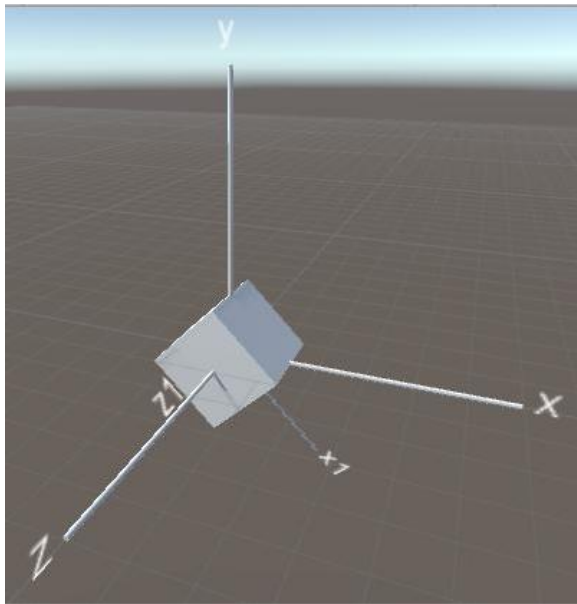
Mirip dengan representasi menggunakan tiga tuple, representasi ini diperoleh dengan membandingkan sumbu local dengan sumbu global. Yang berbeda adalah pada representasi ini, banyak sumbu local yang dibandingkan dengan sumbu global sebanyak dua. Dua sumbu yang digunakan bebas.

Dalam makalah ini, dua sumbu local yang akan digunakan untuk perbandingan adalah sumbu x dan sumbu z. Hasil representasi orientasi pada metode ini akan berbentuk $\langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \rangle$ dengan (a_1, b_1, c_1) merepresentasikan hasil perbandingan sumbu lokal x dan (a_2, b_2, c_2) merepresentasikan hasil perbandingan sumbu lokal z.

Sama dengan representasi menggunakan tiga vektor, jika representasi hasil perbandingan suatu sumbu local objek adalah vektor (a,b,c) , itu berarti sumbu local yang dibandingkan searah dengan vektor (a,b,c) pada sumbu

global.

Misal jika suatu orientasi direpresentasikan dengan $\langle(1,-1,0), (0,0,1)\rangle$, itu berarti pada orientasinya sumbu x local objek searah dengan vektor $(1,-1,0)$ sumbu global dan sumbu z local objek searah dengan vektor $(0,0,1)$ sumbu global.



Gambar 2 orientasi $\langle(1,-1,0), (0,0,1)\rangle$

Karena dalam representasi ini panjang vector tidak dipertimbangkan, maka orientasi yang direpresentasikan $\langle(a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2)\rangle$ akan sama dengan $\langle k_1(a_1,b_1,c_1), k_2(a_2,b_2,c_2)\rangle$ untuk tiap k_1, k_2 konstanta positif.

Dibandingkan dengan representasi menggunakan tuple tiga vektor, banyak angka yang merepresentasikan orientasi pada metode ini lebih sedikit karena tidak ada representasi untuk hasil perbandingan sumbu y. Meskipun representasi perbandingan tersebut dihilangkan, dengan metode ini tiap representasi orientasi masih tetap merepresentasikan paling banyak satu orientasi. Hal ini disebabkan nilai dari anggota tuple yang seharusnya menjadi representasi dari hasil perbandingan sumbu local y dapat diturunkan dari nilai dua sumbu lainnya dengan menggunakan cross product, sehingga vektor hasil perbandingan tersebut tidak perlu ditulis. Karena tiap representasi orientasi masih tetap merepresentasikan paling banyak satu orientasi, metode representasi ini juga memungkinkan untuk menjadi representasi dari orientasi.

Tuple dua vektor yang merupakan representasi dari orientasi harus memenuhi dua syarat. Yang pertama vektor $(0,0,0)$ bukan merupakan isi dari tuple tersebut karena arahnya tidak terdefinisi. Yang kedua, jika tuple berisi vektor v_1 dan v_2 , maka harus memenuhi persamaan

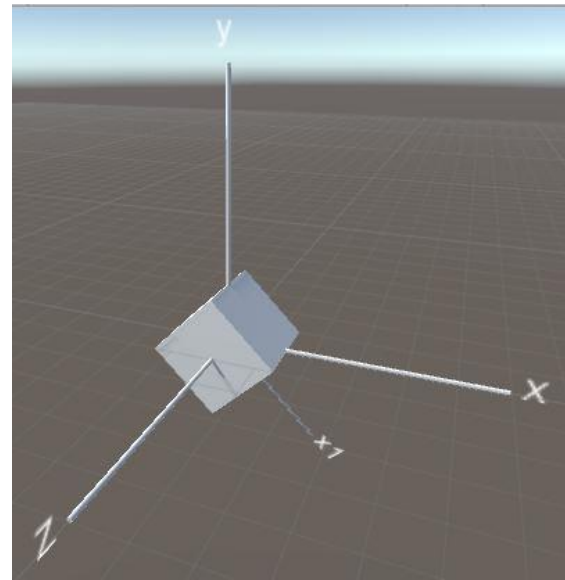
$$v_1 \cdot v_2 = 0$$

Persamaan ini harus dipenuhi karena kedua vektor dalam tuple merepresenasikan arah sumbu local dan sudut antara arah sumbu local selalu siku-siku.

C. Penggunaan Satu Vektor untuk Representasi Orientasi

Konsep metode ini masih sama dengan metode sebelumnya, yaitu membandingkan sumbu local dengan sumbu global. Dalam representasi ini, yang dibandingkan hanya satu sumbu local. Bentuk representasi orientasi pada metode ini adalah (a,b,c) .

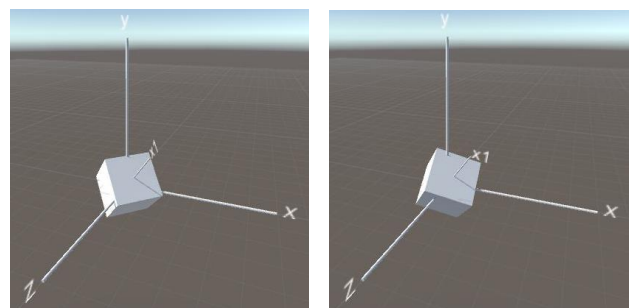
Misal sumbu yang dibandingkan adalah sumbu x. Untuk representasi ini, jika suatu objek memiliki orientasi (a,b,c) , itu berarti dalam kondisi objek saat ini sumbu x local objek searah dengan vektor (a,b,c) .



Gambar 3 Contoh orientasi $(1,-1,0)$

Karena dalam representasi ini panjang vector tidak dipertimbangkan, maka orientasi yang direpresentasikan (a,b,c) akan sama dengan $k(a,b,c)$ untuk tiap k konstanta positif.

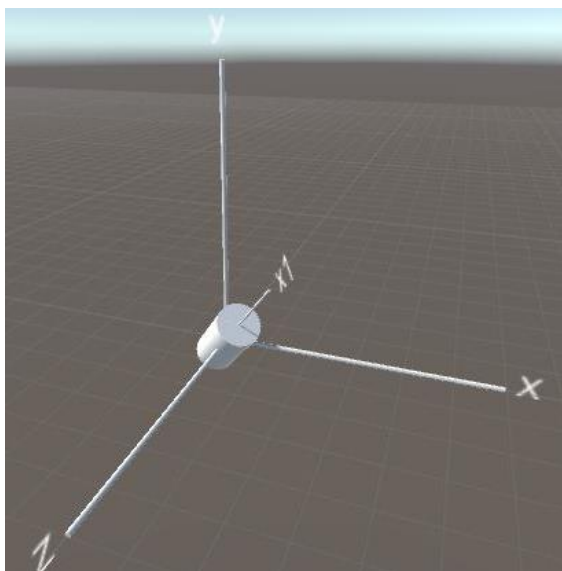
Representasi ini bukanlah representasi yang baik untuk orientasi karena untuk tiap vektor (a,b,c) , orientasi yang direpresentasikan tidak hanya satu.



Gambar 4 Dua orientasi berbeda yang direpresentasikan dengan vektor sama.

Pada Gambar 4, berdasarkan definisi dari representasi ini, kedua kubus direpresentasikan sebagai orientasi yang sama, namun orientasi kedua kubus sebenarnya berbeda.

Meskipun demikian, bukan berarti satu vektor benar-benar tidak bisa digunakan untuk representasi orientasi.



Gambar 5 Orientasi objek yang bersifat radial

Ada syarat bagi bentuk suatu objek agar orientasi objek tersebut dapat direpresentasikan dalam sebuah vektor. Syarat yang dimaksud adalah bentuk objek harus bersifat radial terhadap sumbu local yang dibandingkan dengan sumbu global. Maksud dari bersifat radial terhadap suatu sumbu adalah benda tersebut memiliki tak hingga sudut simetri putar jika diputar terhadap sumbu yang bersangkutan.

Dari hal tersebut, dapat disimpulkan satu vektor saja tidak cukup untuk merepresentasikan orientasi objek umum.

IV. REPRESENTASI ORIENTASI DALAM MATRIKS

Telah diketahui bahwa vektor dapat dinyatakan dalam bentuk matriks. Karena tuple berisi vektor merupakan kumpulan dari beberapa vektor, maka tuple tersebut juga dapat dinyatakan sebagai matriks.

Diantara beberapa representasi orientasi menggunakan vektor yang telah diuraikan, yang bisa digunakan untuk merepresentasikan orientasi objek adalah representasi menggunakan tuple tiga vektor dan tuple dua vektor. Karena matriks dapat merepresentasikan tuple berisi vektor, maka orientasi juga dapat direpresentasikan dalam matriks.

Pada umumnya, untuk representasi vektor, satu baris matriks berisi elemen vektor pada satu sumbu. Oleh karena itu, matriks yang tepat untuk merepresentasikan tuple tiga vektor adalah 3×3 dan matriks yang tepat untuk merepresentasikan tuple dua vektor adalah 3×2 . Representasi dari tuple $\langle (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) \rangle$ adalah

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

dan representasi dari tuple $\langle (a, b, c), (d, e, f) \rangle$ adalah

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Operasi yang dapat dilakukan terhadap orientasi adalah rotasi. Karena orientasi dapat direpresentasikan sebagai matriks dan hasil akhir dari rotasi terhadap suatu orientasi adalah orientasi juga, maka rotasi dapat dinyatakan perkalian matriks orientasi dengan matriks transformasi.

Untuk rotasi terhadap sumbu z, semua komponen baris ketiga matriks tidak berubah karena tidak ada translasi terhadap sumbu z, hanya rotasi. Hal ini menyebabkan perubahan yang disebabkan rotasi terhadap sumbu z mirip dengan rotasi vektor dua dimensi x dan y, yaitu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

menjadi

$$\begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

Sehingga hasil akhir dari rotasi terhadap sumbu z seharusnya adalah

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ma - nb & md - ne & mg - nh \\ na + mb & nd + me & ng + mh \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ma - nb & md - ne \\ na + mb & nd + me \\ c & f \end{pmatrix}$$

$$m = \cos \theta$$

$$n = \sin \theta$$

Matriks transformasi rotasi terhadap sumbu z yang memenuhi aturan hasil tersebut adalah

$$A_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh matriks rotasi untuk sumbu x dan sumbu y, yaitu

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A_y = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{pmatrix}$$

Karena matriks transformasi untuk melakukan rotasi terhadap tiap sumbu sudah didapat, untuk melakukan rotasi lain, dapat dilakukan dengan beberapa kali rotasi terhadap sumbu.

V. SIMPULAN

Matriks dapat digunakan untuk representasi orientasi benda dalam dua ukuran, yaitu ukuran matriks 2×3 dan ukuran matriks 3×3 . Kelebihan dari representasi 2×3 adalah angka untuk merepresentasikan orientasi lebih sedikit karena hanya terdiri dari dua vektor. Namun representasi 3×3 memiliki keunggulan dalam hal ukuran yang sama dengan matriks transformasi, sehingga tipe data yang perlu dibuat saat implementasi ke computer lebih sedikit.

VI. TERIMA KASIH

Puji Syukur penulis ucapkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena hanay atas rahmat-Nya makalah ini dapat terselesaikan. Ucapan terima kasih juga penulis ucapkan kepada Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir, M.T. dan bapak Drs. Judhi Santoso, M.Sc. selaku dosen pembimbing mata kuliah IF2123 Aljabar Geometri yang telah memberikan ilmu kepada penulis yang merupakan dasar dari penulisan makalah ini.

REFERENCES

[1] John Vince. 2008. *Geometric Algebra for Linear Graphic*. London:Springer.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2015



Cendhika Imantoro - 13514037