Penerapan Aljabar Geometri pada Rotasi Objek dalam Software Pemodelan 3 Dimensi

Joshua Aditya Kosasih
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514012@std.stei.itb.ac.id

***Abstract*—Aljabar Geometri memungkinkan perhitungan dan manipulasi geometri dengan cara yang lebih sederhana dan universal. Salah satu manipulasi geometri yang sangat disederhanakan dengan adanya aljabar geometri adalah transformasi linier rotasi. Software pemodelan 3 dimensi membutuhkan sistem rotasi yang baik untuk dapat memberikan spatial perception yang baik pada penggunanya. Kebutuhan sistem rotasi dalam software pemodelan 3 dimensi dapat dipenuhi dengan implementasi dari aljabar geometri.**

***Keywords*—Aljabar Geometri, Bivector Angle, Blade.**

I. PENDAHULUAN

Aljabar Geometri adalah suatu cabang ilmu aljabar yang berurusan dengan masalah geometri. Selain aljabar geometri, telah ada dahulu yang namanya aljabar vektor. Tetapi walaupun keduanya membahas masalah geometri, aljabar geometri dan aljabar vektor cukup jauh berbeda cakupannya.

Aljabar vektor (*Vector Algebra*) dan vektor kalkulus (*Vector Calculus*) adalah bagian dari kurikulum matematika standar karena ilmu tersebut sangat penting dalam ilmu matematika murni dan juga terapan. Awalnya aljabar vektor tidak dipakai dimana-mana seperti sekarang. Metode vektor dikembangkan oleh dua orang fisikawan, Josiah Willard Gibbs dan Oliver Heaviside diawal tahun 1870. Tetapi metode itu baru diterima umum secara luas sampai abad ke duapuluh.

Aljabar vektor memungkinkan kita untuk memanipulasi vektor dengan metode-metode aljabar. Tetapi aljabar vektor bukanlah cara matematis paling mutakhir untuk memanipulasi objek geometris dengan metode-metode aljabar.

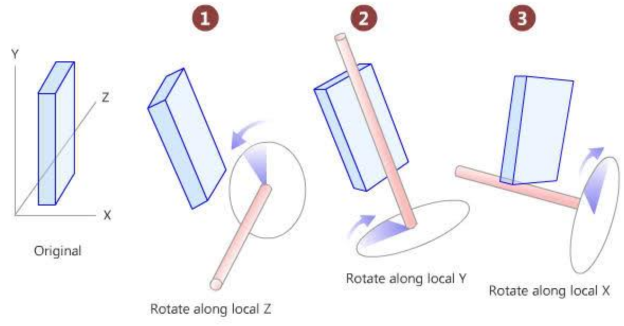
Aljabar geometri dikembangkan oleh seorang fisikawan asal Amerika bernama David Hestenes di awal tahun 1960. Aljabar geometri dan tambahannya dalam kalkulus geometri mempersatukan, menyederhanakan, dan menggeneralisir suatu area luas dalam matematika yang berhubungan dengan geometri. Yang termasuk di dalam area tersebut adalah aljabar vektor, kalkulus vektor, *Exterior (Grassmann) Algebra, Exterior Calculus, Tensor Algebra, Tensor Calculus, Quaternion, Real Analysis, Complex Analysis*, dan *Euclidean, non-Euclidean*, dan *Projective Geometries*.

Aljabar Geometri menyediakan ‘bahasa’ matematis yang umum untuk banyak area dalam:

- Fisika, contohnya mekanika klasik dan kuantum, elektrodinamika, relativitas
- Komputer sains, contohnya grafik, robot, pemrosesan gambar
- Teknik
- Dll

“The principal argument for the adoption of geometric algebra is that it provides a single, simple mathematical framework which eliminates the plethora of diverse mathematical descriptions and techniques it would otherwise be necessary to learn” – Allan McRobie dan Joan Lasenby.

Rotasi adalah perputaran suatu benda pada sumbu yang tetap. Rotasi objek 3 dimensi adalah salah satu transformasi linier yang paling penting dalam ruang 3 dimensi. Dengan merotasi suatu objek, struktur objek tersebut dapat dilihat dari perspektif yang lain. Hal ini membuat kita bisa mendapatkan spatial perception dari objek itu dan juga menambah atau memperkuat kesan nyata dari objek tersebut.

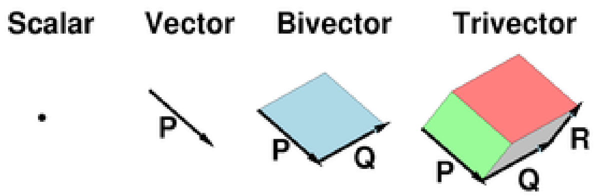


Konsep rotasi dipakai dalam bidang matematika, fisika, teknik, komputer, dll. Terdapat beberapa konsep atau metode rotasi yang berbeda. Ada yang menggunakan aljabar vektor, quaternion, dll. Tetapi kebanyakan memiliki kelemahan-kelemahan yang cukup berdampak. Sedangkan konsep rotasi dengan penerapan aljabar geometri dapat melampaui kelemahan-kelemahan dari metode lainnya.

II. Teori Aljabar Geometri

Dalam aljabar vektor dikenal ruang vektor dengan n-dimensi yang bernama $\mathbb{R}^n$. Didalam ruang tersebut terdapat elemen-elemen yang bernama vektor. Dalam ruang tersebut juga terdapat beberapa operasi yaitu perkalian scalar dan inner product (dot product).

Sedangkan dalam aljabar geometri ruang geometri dengan n-dimensi disebut $\mathcal{G}^n$. Elemen-elemen dalam $\mathcal{G}^n$ bernama multivektor. Jika dimensinya adalah 3 yang artinya ruang disebut $\mathcal{G}^3$, multivektor-multivektornya memiliki empat jenis yang berbeda: scalar, vektor, bivektor, dan trivektor. Setiap jenisnya memiliki besar dan arahnya masing-masing.



Skalar adalah ukuran yang berarah. Besar dari suatu scalar adalah nilai absolutnya |s|. Arahnya hanya dua, antara > 0 atau < 0. Skalar ada di dalam R^3 tetapi tidak termasuk elemen dari R^3.

Vektor adalah potongan/bagian/segmen dari suatu garis yang berarah. Besar sebuah vektor adalah panjangnya |**v**|. Arahnya ditunjukkan oleh arah anak panahnya. Sebuah vektor dianggap tidak berubah jika dipindahkan sejajar dengan dirinya. Vektor adalah benda 1 dimensi. Tetapi vektor dapat berada dalam ruang 3 dimensi.

Bivektor adalah bagian/segmen dari suatu bidang berarah. Besar sebuah bivektor adalah luasnya |**B**|. Arahnya ditunjukkan oleh arah anak panah yang berputar. Bivektor dianggap tidak berubah jika dipindah sejajar dengan dirinya sendiri, diputar dalam bidangnya, berubah bentuk (selama luasnya tetap). Bivektor tidak memiliki bentuk yang konkrit.

Trivektor adalah bagian/segmen dari suatu ruang berarah. Besar sebuah trivektor adalah volumenya |**T**|. Arahnya antara left handed atau right handed. Trivektor dianggap tidak berubah jika dipindah, diputar, atau diubah bentuknya selama volumenya tetap. Setiap trivektor **T** adalah hasil dari perkalian scalar dari sebuah trivektor $\mathbf{T}_0$ yang bukan nol.

Multivektor adalah elemen atau objek dalam G^3. Rumusannya adalah:

$$M = s + \mathbf{v} + \mathbf{B} + \mathbf{T}.$$

Operasi-operasi dalam G^3 ada tiga: inner product, outer product, dan geometric product.

Inner product (dot product) adalah perkalian dua buah vektor yang menghasilkan scalar.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta,$$

Jika dua buah vektor u dan v saling sejajar, hasil inner productnya adalah perkalian dari besar u dan besar v. Sedangkan jika keduanya tegak lurus maka hasil perkaliannya nol. Inner product bersifat komutatif.

Outer product (wedge product) adalah perkalian dua buah vektor yang menghasilkan sebuah bivektor. Meskipun hasil dari outer product adalah bivektor (bivektor tidak memiliki bentuk yang konkrit), tetapi bivektor hasil outer product memiliki bentuk yang konkrit. Jika dua buah vektor u dan v saling sejajar, hasil outer productnya adalah nol. Sedangkan jika keduanya tegak lurus, hasil perkaliannya adalah hasil kali besar u dan besar v. Outer product tidak bersifat komutatif.

Geometric product dari dua buah vektor u dan v adalah penjumlahan dari inner product dan outer product dari u dan v. Geometric product adalah identitas dasar dari aljabar geometri.

$$\mathbf{uv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}.$$

Jika u dan v sejajar, hasil geometric productnya adalah inner product dari u dan v.

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{uv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|.$$

Sedangkan jika keduanya saling tegak lurus, hasil perkaliannya adalah outer product dari u dan v.

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{uv} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

Kelebihannya dari aljabar geometri adalah operasi-operasi diatas bisa dipakai untuk mengoperasikan multivektor. Contohnya, perkalian outer product antara sebuah vektor dan sebuah bivektor adalah valid/diperbolehkan. Operasi-operasi diatas juga memiliki sifat distributif. Geometric product dan outer product memiliki sifat asosiatif.

III. Penerapan dalam Rotasi dan Software Pemodelan 3 Dimensi

A. Bilangan Kompleks

Pseudoscalars adalah objek dengan dimensi tertinggi yang dapat 'hidup' dalam ruang dimensi n. Dalam G^3, pseudoscalarnya adalah trivektor. Trivektor membentuk ruang vektor 1 dimensi. Dalam G^2, pseudoscalarnya adalah bivektor. Bivektor juga membentuk ruang vektor 1 dimensi. Dalam G^{2Ds} (subruang 2 dimensi dalam R^n) pseudoscalarnya adalah bivektor, yang juga membentuk ruang vektor 1 dimensi.

i adalah satuan terkecil pseudoscalar ruang/subruang 2 dimensi. Satuan/basis dari subruang 2 dimensi dalam R^n adalah {e1, e2}. Sehingga satuan pseudoscalar dari subruang tersebut adalah perkalian dari basis-basisnya.

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2.$$

i adalah sebuah bivektor. Jikalau **i** dikuadratkan, maka akan didapat

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1$$

Persamaan diatas menunjukkan kalau satuan pseudoscalar ini berlaku sebagai satuan imaginer. Sehingga suatu multivektor dengan bentuk a + b**i** isomorfis dengan bilangan kompleks. Setiap subruang 2 dimensi dari R^n mempunyai sistem bilangan kompleksnya masing-masing. Mudahnya, sebuah subruang 2 dimensi dengan satuan pseudoscalar **i** dapat dianggap atau dilihat sebagai bidang **i**.

B. Bivector Angle

Bivector angle dilambangkan dengan $\mathbf{i}\theta$. θ adalah sudut di bidang **i**. Bivector angle juga dapat dianggap sebagai sebuah sudut. $\mathbf{i}\theta$ menspesifikasikan bidang **i** dimana sudut itu berada dan juga besarnya θ.

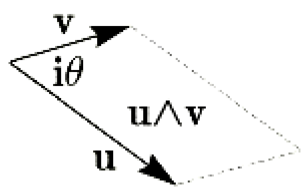
Berikut definisi dari $\mathbf{i}\theta$.

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta.$$

Bivector angle juga dapat digunakan dalam mengembangkan pengertian perkalian geometri.

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|e^{\mathbf{i}\theta}$$

Berikut pembuktian dari rumusan diatas:

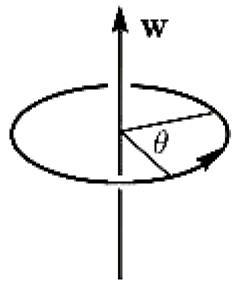


$$\begin{aligned} \mathbf{uv} &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta + |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta\,\mathbf{i} \\ &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta) \\ &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|e^{\mathbf{i}\theta}. \end{aligned}$$

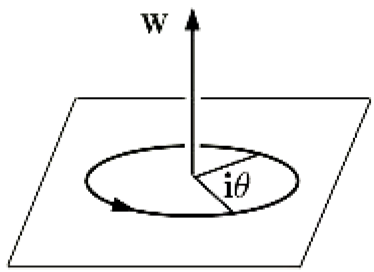
Pengertian bivector angle ini juga umum disebut oleh matematikawan sebagai rotor.

C. Rotasi dengan Bivector Angle

Umumnya rotasi dijabarkan dengan dua buah informasi, yaitu sebuah poros putar, vektor **w** dan sebuah sudut, scalar θ.



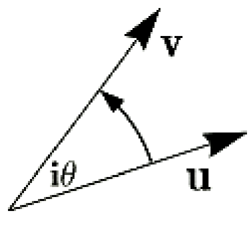
Dengan bivector angle, rotasi dijabarkan dengan sebuah bidang **i** dan sudut θ.



Bidang **i** tegak lurus dengan poros **w**. Terlihat pada gambar, rotasinya tidak memutari sebuah poros, tetapi berada di sebuah bidang.

Misal terdapat sebuah vektor **u** yang diputar sebesar sudut bivector angle $\mathbf{i}\theta$ sehingga menjadi vektor **v**. Terdapat dua kasus pada persoalan ini: kasus paling mudah yaitu vektor **u** dan **v** berada pada bidang yang sama bidang **i** dan kasus yang lebih umum yaitu vektor **u** dan **v** sama-sama tidak berada pada bidang **i**.

Kasus paling sederhana yaitu vektor **u** dan **v** sama-sama berada pada bidang **i**.



Berikut rumusannya:

$$\mathbf{uv} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\,e^{\mathbf{i}\theta}$$

Kalikan kedua ruas dengan **u**

$$\mathbf{u}^2\mathbf{v} = \mathbf{u}|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\,e^{\mathbf{i}\theta}$$

uu = |**u**||**u**| (sifat perkalian geometri)

$$|\mathbf{u}||\mathbf{u}|\mathbf{v} = \mathbf{u}|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\,e^{\mathbf{i}\theta}$$

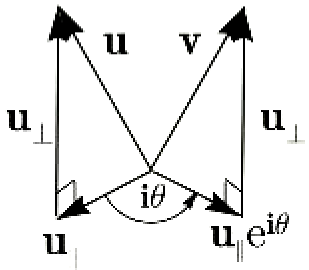
Karena vektor **u** diputar menjadi vektor **v** maka panjang kedua vektor adalah sama (|**u**| = |**v**|)

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\mathbf{v} = \mathbf{u}|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\,e^{\mathbf{i}\theta}$$

Bagi kedua ruas dengan $|\mathbf{u}|$ dan $|\mathbf{v}|$ didapat hasil:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}\,e^{\mathbf{i}\theta}$$

Kasus yang lebih susah dan lebih umum yaitu vektor **u** dan **v** sama-sama tidak berada pada bidang **i**



Berikut rumusannya:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{u}_{\|}\,e^{\mathbf{i}\theta} + \mathbf{u}_{\perp}\\ &= \mathbf{u}_{\|}\,e^{\mathbf{i}\theta/2}\,e^{\mathbf{i}\theta/2} + \mathbf{u}_{\perp}\,e^{-\mathbf{i}\theta/2}\,e^{\mathbf{i}\theta/2}\end{aligned}$$

Gunakan sifat komutatif non-komutatif untuk memindahkan $e^{-i\theta/2}$ kedepan

$$= e^{-\mathbf{i}\theta/2}\,\mathbf{u}_{\|}\,e^{\mathbf{i}\theta/2} + e^{-\mathbf{i}\theta/2}\,\mathbf{u}_{\perp}\,e^{\mathbf{i}\theta/2}$$

Gunakan sifat distributif

$$= e^{-\mathbf{i}\theta/2}\,(\mathbf{u}_{\|} + \mathbf{u}_{\perp})\,e^{\mathbf{i}\theta/2}$$

Didapat hasil:

$$= e^{-\mathbf{i}\theta/2}\,\mathbf{u}\,e^{\mathbf{i}\theta/2}$$

Dengan hasil diatas, kita dapat merotasikan sebuah vektor **v** dengan bebas dan mudah. Hanya diperlukan sebuah bivector angle yang sudah kita tetapkan nilainya untuk digunakan.

Tetapi, benda yang berada dalam ruang 3 dimensi tidak hanya berupa vektor;bisa juga bivektor, trivektor, bahkan multivektor. Aljabar geometri mempunyai sifat khusus yang memungkinkan kita untuk menggunakan persamaan diatas tidak hanya untuk vektor, tetapi bisa untuk multivektor. Perihal ini dibahas di subbab D.

Selain menggunakan aljabar geometri untuk menghitung atau mengkomputasi rotasi suatu objek, terdapat banyak cara lainnya: misal dengan matriks transformasi, quaternion, dll. Tetapi aljabar geometri memiliki kelebihan-kelebihan dibanding metode lainnya ini. Hal ini dibahas di bab 4.

D. Blade

Sebuah k-blade adalah hasil outer product dari k buah vektor bebas linear

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_k$$

Sebuah blade **B** merepresentasikan:

1. Parallelepiped dengan sisi $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$
2. Subruang dengan rentang $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$

Contohnya pseudoscalar **i** adalah sebuah blade.

Blade adalah generalisasi dari konsep multivektor. Tetapi yang membuat blade penting adalah: Operasi aljabar pada blade mewakili operasi geometri pada parallelepiped dan subruang yang direpresentasikan blade tsb.

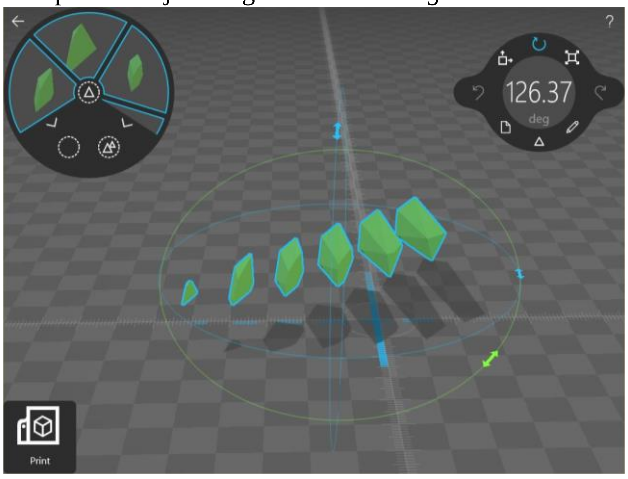
Contohnya adalah rumusan yang telah dibahas sebelumnya, namun telah diperluas berdasarkan pengertian diatas:

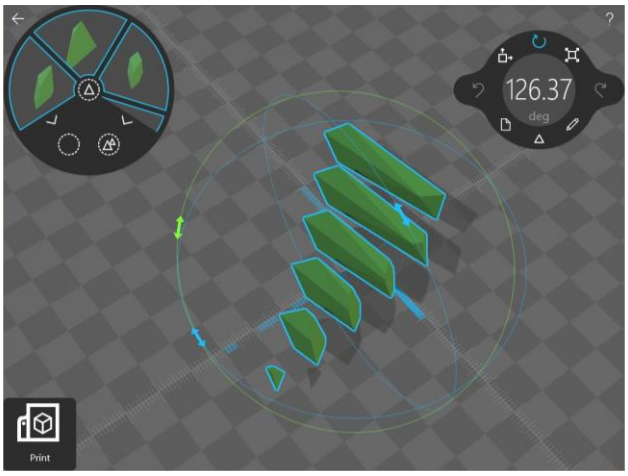
$$e^{-\mathbf{i}\theta/2}\,\mathbf{b}\,e^{\mathbf{i}\theta/2}.$$

Dimana **b** adalah sebuah blade.

E. Software Pemodelan 3 Dimensi

Pada software pemodelan benda 3 dimensi, terdapat suatu fitur esensial yaitu memutar sudut pandang kita terhadap suatu objek dengan *click and drag* mouse.





Yang saya lakukan pada gambar kedua adalah click and drag mouse dengan arah diagonal ke kanan bawah. Walaupun terlihat seperti sudut pandang kita yang berubah ('mata' kita seperti terbang ke atas objek tersebut) namun yang terjadi sebenarnya adalah setiap objek dan bidang berpetak-petak (lantai) dibawahnya yang diputar sesuai dengan arah gerak click and drag mouse kita.

Secara singkat cara kerja rotasi dengan *click and drag* adalah sebagai berikut:

Pada saat mouse click, program mendeteksi posisi mouse di titik p, dan menunggu pergerakan. Jika mouse bergerak sejauh s (s bisa berapa saja dengan satuan apa saja, tergantung dari softwarenya) sampai ke titik q, maka dibuat sebuah vektor **v** dari p ke q dengan besar |**v**| = s. Selain itu juga dibuat vector **u** dengan besar |**u**| = s yang arahnya adalah masuk kedalam layar (x). Lalu dihitung pseudoscalar **i** dengan outer product **v** dan **u**.

$\mathbf{i} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

Kemudian dibuat bivector angle $\mathbf{i}\theta$ dengan θ bernilai n (n bisa berapa saja, tergantung dari software dan sensitivitasnya)

Dengan demikian setiap kali setiap kali dilakukan gerakan *click and drag* mouse, dibuat bivector angle yang dipakai untuk merotasikan objek-objek dalam software tersebut.

IV. Kelebihan

Berikut adalah metode-metode lainnya dalam merepresentasikan rotasi:

- Matriks transformasi
- Euler angles
- Quaternion

Dibanding matriks transformasi, lebih mudah untuk merepresentasikan rotasi menggunakan aljabar geometri. Misal jika diberi suatu poros rotasi / bidang rotasi dan sebuah nilai scalar sudut rotasi yang diinginkan, tidak mudah untuk membuat matriks yang merepresentasikan rotasi tsb. Sedangkan pada aljabar geometri hanya diperlukan satu rumusan yang ada diatas.

Pada euler angle terdapat suatu fenomena bernama gimbal lock yang dapat mengakibatkan hilangnya satu derajat kebebasan dalam berputar (normalnya 3 derajat). Sedangkan aljabar geometri bebas dari fenomena tsb.

Quaternion merupakan salah satu metode yang dapat dipakai untuk merepresentasikan rotasi dengan baik. Quaternion juga mirip dengan rotor. Tetapi penggunaan metodenya hanya dapat merepresentasikan rotasi pada vektor, tidak bisa pada garis atau bidang. Aljabar geometri dapat digunakan untuk rotasi k-blade dengan k yang bebas, dan bahkan bisa untuk dimensi 4 atau lebih dengan mudah.

V. Kesimpulan

Aljabar Geometri adalah sebuah kerangka yang mempersatukan dan menyederhanakan area luas dalam matematika yang berhubungan dengan geometri. Dengan kerangka tersebut terdapat banyak konsep yang memudahkan manipulasi geometri yang sebelumnya berbelit-belit atau terspesialisasi hanya untuk kasus tertentu. Salah satu manipulasi geometri yang dimudahkan adalah transformasi linear rotasi. Representasi rotasi dengan aljabar geometri memiliki bentuk yang sederhana dan dapat diaplikasikan pada berbagai kondisi. Rotasi ini dipakai dalam software pemodelan 3 dimensi untuk membuat penggunanya bisa mendapatkan spatial perception dari model yang dibuatnya.

VII. Terima Kasih

Saya berterimakasih pada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat bantuan-Nya makalah ini dapat selesai. Saya juga berterimakasih pada dosen saya, Pak Rinaldi Munir dan Pak Judhi Santoso yang telah mengajari saya tentang Aljabar Geometri yang menginspirasi saya untuk mengambil topik aplikasi aljabar geometri sebagai topik makalah saya. Terima kasih juga untuk segenap keluarga dan teman-teman yang telah membantu menguatkan saya dalam menyelesaikan makalah ini.

References

- Macdonald, Alan (2011). *Linear and Geometric Algebra*. Charleston: CreateSpace. ISBN 9781453854938. OCLC 704377582
- Vince, John A. (2008), *Geometric Algebra for Computer Graphics*, Springer, ISBN 978-1-84628-996-5
- Geometric Algebra for Computer Science http://www.geometricalgebra.net/quaternions.html
  Diakses tanggal 13 Desember 2015
- How 3-D Graphics Work http://computer.howstuffworks.com/3dgraphics.htm
  Diakses tanggal 15 Desember 2015

Pernyataan

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015

Joshua Aditya Kosasih, 13514012