Penggunaan Identitas Euler dalam Analisis Rangkaian orde 2

Richard Wellianto - 13514051
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
richard.wellianto@students.itb.ac.id

***Abstract— Euler Identity*, atau Identitas Euler, persamaan yang dianggap persamaan indah dalam dunia matematika. Dinamai dari ahli matematika Leonhard Euler, Identitas Euler dapat diturunkan dari deret taylor dan maclaurin. Identitas Euler juga dapat digunakan untuk mencari solusi rangkaian orde 2 pada bidang elektro. Makalah ini akan menjelaskan penurunan dari Identitas Euler beserta beberapa aplikasinya.**

***Keywords*— Identitas Euler, Deret Taylor, Rangkaian Orde 2, Bilangan Kompleks**

I. PENDAHULUAN

Identitas Euler, formula yang dinamakan untuk mengenang ahli matematika Leonhard Euler adalah formula yang menggabungkan trigonometri, logaritma, imajiner, dan bilangan π. Sebuah formula yang dapat membentuk persamaan yang bisa dikatakan indah dalam dunia matematika. Identitas Euler diturunkan dari beberapa proses, seperti Deret Taylor dan Maclaurin, dan dapat digunakan untuk menyelesaikan beberapa persoalan, baik dalam bidang matematika seperti trigonometri, maupun bidang elektro seperti pencarian solusi rangkaian orde 2.

Ada 2 persamaan yang biasanya dikatakan dengan identitas euler. Pertama, persamaan $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, yang merupakan penurunan dari deret taylor dan maclaurin. Persamaan ini terkadang disebut sebagai *Euler Formula*, atau rumus euler, yang menyebabkan persamaan kedua yang disebut sebagai identitas euler.

Kedua, persamaan $e^{i\pi} + 1 = 0$ atau $e^{i\pi} = -1$. Persamaan inilah yang menyebabkan identitas euler dikenal sebagai persamaan indah dalam dunia matematika. Persamaan ini menggabungkan bilangan e, sebuah bilangan yang dipakai dalam logaritma, i, bilangan imajiner, yang semestinya tidak nyata, π, yang berkaitan dengan geometri dan trigonometri, 1, yang dikalikan dengan bilangan apapun hasilnya adalah bilangan itu sendiri, dan 0, yang ditambahkan dengan bilangan apapun hasilnya adalah bilangan itu sendiri. Definisi Identitas Euler yang dipakai adalah definisi pertama.

II. PENURUNAN RUMUS

A. Deret Taylor

Deret Taylor adalah deret yang menggunakan polinomial dan turunan untuk menaksir nilai dari sebuah fungsi. Deret Taylor memakai sebuah angka real sebagai patokan taksiran, misalnya a. Artinya untuk seluruh bilangan real x, semakin dekat nilainya dengan a maka semakin dekat nilai aproksimasi fungsinya. Oleh karena itu, ketika mencari taksiran dari $f(x)$, dibutuhkan a yang sedekat mungkin dengan x agar taksiran $f(x)$ mendekati nilai yang sebenarnya.

Untuk nilai a yang cukup dekat dengan x, dapat diasmumsikan bahwa $f(x)$ nilainya mendekati dengan $f(a)$. Akan tetapi, perbedaan dari nilai turunan dari $f(x)$ (biasa disebut $f'(x)$) dengan nilai turunan dari $f(a)$ atau $f'(a)$ akan memperlihatkan perbedaan yang terjadi antara $f(x)$ dan $f(a)$, yang mengurangi ketepatan taksiran dari nilai $f(x)$. Agar perbedaan antara $f(x)$ dan $f(a)$ mendekati nol (taksiran mendekati nilai asli), maka digunakan rumus di bawah ini

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (1)$$

$f(x) = f(a)$ karena nilai dari x mendekati a sehingga $x-a$ mendekati nol.

$f'(x) = f'(a)$ karena ketika kedua ruas diturunkan terhadap x, $f(x)$ menjadi $f'(x)$, sedangkan $f(a)+f'(a)(x-a)$ menjadi $f'(a)$. Perlu diingat lagi bahwa $f(a)$ dan $f'(a)$ jika diturunkan terhadap x akan dianggap sebagai konstanta, yang turunannya terhadap x adalah nol.

Taksiran (1) masih belum cukup untuk menaksir nilai $f(x)$, karena nilai turunan dari $f'(x)$ atau yang biasanya disebut dengan $f''(x)$ berbeda dengan nilai turunan dari $f'(a)$ atau yang biasanya disebut dengan $f''(a)$. Taksiran (1) masih diperlukan agar $f(x) = f(a)$ dan $f'(x) = f'(a)$, tetapi perlu ditambahkan sesuatu agar $f''(x) = f''(a)$. Taksiran (1) perlu ditambahkan dengan $\frac{f''(x)}{2}(x-a)^2$ sehingga taksiran $f(x)$ menjadi

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \qquad (2)$$

Ketika $f(x)$ diturunkan (untuk mengecek kesamaan antara $f'(x)$ dan $f'(a)$), $(x-a)$ pada $\frac{f''(x)}{2}(x-a)^2$ tidak hilang biarpun diturunkan terhadap x, sehingga kesamaan antara $f'(x)$ dan $f'(a)$ tetap terjaga. Ketika (2) diturunkan terhadap x sebanyak 2 kali, ruas kiri menjadi $f''(x)$ dan ruas kanan menjadi $f''(a)$. Seperti ketika membuat taksiran (1), perlu diingat bahwa $f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ ketika diturukan terhadap x sebanyak 2 kali, akan menghasilkan $f''(a)$ sehingga kesamaan antara $f''(x)$ dan $f''(a)$. Dapat disimpulkan nilai $f(x)$ pada taksiran (2) lebih mendekati nilai $f(x)$ yang sebenarnya daripadai nilai $f(x)$ pada taksiran (1).

Ketika langkah-langkah ini diteruskan, maka akan terbentuk deret yang terdiri dari $f(a)$ dan bentuk turunannya seperti $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, $f^{(4)}(a)$, dan seterusnya yang dikalikan dengan bentuk $\frac{(x-a)^n}{n!}$ seperti 1, $(x-a)$, $\frac{(x-a)^2}{2}$, $\frac{(x-a)^3}{6}$, $\frac{(x-a)^4}{24}$, dan seterusnya. Semakin panjang deret taylor maka nilai $f(x)$ pada deret tersebut akan semakin mendekati nilai $f(x)$ yang asli. Bentuk umum deret taylor menjadi seperti di bawah ini

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{24}(x-a)^4 + \ldots$$

Bentuk umum deret taylor sedikit menyerupai bentuk polinomial. Deret taylor umumnya digunakan untuk ketika $f(a)$, $f'(a)$ dan seterusnya mudah didapatkan tetapi $f(x)$ tidak mudah didapatkan. Misalnya ketika mencari nilai dari $\sin(89.9)$ (satuan derajat). Nilai dari $\sin(89.9)$ dapat ditaksir menggunakan deret taylor, dengan $f(x) = \sin(x)$ (satuan adalah derajat, bukan radian), $x = 89.9$, dan $a = 90$ karena mudah untuk mencari nilai dari $\sin(90)$, $\cos(90)$ ($\cos(x)$ adalah turunan dari $\sin(x)$ terhadap x), dan turunan-turunan setelahnya. Dengan deret taylor yang cukup panjang, nilai dari $\sin(89.9)$ dapat dicapai dengan galat seminimal mungkin.

B. Deret Maclaurin untuk e^x, $\sin x$, dan $\cos x$.

Deret Maclaurin adalah deret Taylor yang menggunakan nilai nol sebagai pusat taksiran, atau menggunakan nilai nol sebagai nilai a pada deret taylor di bab sebelumnya. Sehingga, bentuk umum dari deret maclaurin menjadi seperti di bawah ini

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

$$+\frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}x^5 + \ldots \qquad (3)$$

Dalam mengubungkan e^x, $\sin x$, dan $\cos x$, nilai nol sangat mdah dipakai untuk memperlihatkan bentuk deret taylor dari ketiga bentuk tersebut karena

$$e^0 = 1 \qquad (4)$$

$$\sin 0 = 0 \qquad (5)$$

$$\cos 0 = 1 \qquad (6)$$

Untuk mencari deret Maclaurin dari e^x, terlebih dahulu perlu diketahui turunan dari e^x. Dengan menggunakan aturan limit, didapatkan bahwa turunan dari e^x adalah dirinya sendiri, yaitu e^x. Menggunakan (3) dan (4), didapatkan bahwa deret Maclaurin dari e^x adalah

$$e^x = e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2}x^2 + \frac{e^0}{6}x^3 + \frac{e^0}{24}x^4 + \frac{e^0}{120}x^5 + \ldots$$

atau bisa disederhanakan menjadi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \qquad (7)$$

yang memiliki bentuk umum seperti di bawah ini

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Untuk mencari deret Maclaurin dari $\sin x$ dan $\cos x$, terlebih dahulu perlu diketahui turunan dari $\sin x$ dan $\cos x$. Dengan aturan limit, didapatkan bahwa

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \qquad (9)$$

Menggunakan (8) dan (9) dapat ditunjukkan bahwa untuk $g(x) = \sin x$ dan $h(x) = \cos x$ didapatkan

$$\frac{d}{dx}g(x) = h(x)$$
$$\frac{d}{dx}h(x) = -g(x)$$
$$\frac{d}{dx}(-g(x)) = -h(x)$$
$$\frac{d}{dx}(-h(x)) = g(x)$$

(10)

sehingga dengan penurunan sebanyak 4 kali, baik $\sin x$ maupun $\cos x$ akan kembali menjadi bentuk asalnya. Dengan menggunakan (3), (4), (5), dan (10) didapatkan bahwa deret Maclaurin dari $\sin x$ dan $\cos x$ adalah

$$\sin x = \sin 0 + (\cos 0)x - \frac{\sin 0}{2}x^2 - \frac{\cos 0}{6}x^3$$

$$+\frac{\sin 0}{24}x^4 + \frac{\cos 0}{120}x^5 - \frac{\sin 0}{720}x^6 - \frac{\cos 0}{5040}x^7 + \ldots$$

$$\cos x = \cos 0 - (\sin 0)x - \frac{\cos 0}{2}x^2 + \frac{\sin 0}{6}x^3$$

$$+\frac{\cos 0}{24}x^4 - \frac{\sin 0}{120}x^5 - \frac{\cos 0}{720}x^6 + \frac{\sin 0}{5040}x^7 + \ldots$$

yang bisa disederhanakan menjadi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (11)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (12)$$

x pada (11) dan (12) memiliki satuan radian.

Jika x pada (7) disulihkan menjadi ix, dengan $i = \sqrt{-1}$, bilangan imajiner, maka akan didapatkan

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots \qquad (13)$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $i = \sqrt{-1}$, akan didapatkan

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$
$$i^5 = i$$

yang disulihkan dengan (13) menjadi

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + ... \quad (14)$$

Persamaan (14) dapat disusun menjadi

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + ix - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{ix^7}{7!} + ...$$

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...) \quad (15)$$

Perhatikan bahwa (15) dapat dibentuk dari (11) dan (13) sehingga (15) dapat diubah menjadi

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (16)$$

Persamaan (16) adalah persamaan yang biasanya disebut *Euler Identity* atau Identitas Euler. Satuan dari x pada (16) adalah radian,

C. Kasus spesial identitas Euler

Ketika x pada (16) disulihkan dengan π, akan didapatkan persamaan di bawah ini

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) \quad (17)$$

Perhatikan bahwa $\cos(\pi) = -1$ dan $\sin(\pi) = 0$ sehingga (17) menjadi

$$e^{i\pi} = -1 \quad (18)$$

Persamaan (18) adalah persamaan yang dianggap spesial karena menggabungkan 3 buah elemen yang bernilai tidak real, yaitu e, i, dan π, tetapi dapat menghasilkan sebuah bilangan yang tidak hanya real, melainkan juga bulat, yaitu -1.

III. APLIKASI IDENTITAS EULER

A. Pencarian nilai $\cos(nx)$ dan $\sin(nx)$

Ketika x pada (16) disulihkan menjadi nx, maka akan terbentuk persamaan di bawah ini

$$e^{i(nx)} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

yang bisa dibentuk menjadi

$$(e^{ix})^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \quad (19)$$

Dengan menggunakan (16), e^{ix} pada (19) dapat diubah menjadi

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \quad (20)$$

Dari (20) dapat disimpulkan bahwa $\cos nx$ dan $\sin nx$ dapat diperoleh dengan hanya menggunakan $\cos x$ dan $\sin x$. Hasil real dari $(\cos x + i \sin x)^n$ akan menjadi $\cos(nx)$ sedangkan hasil imajinernya akan menjadi $\sin(nx)$.

B. Pencarian hasil akar pangkat dari bilangan kompleks

Perhatikan bahwa bentuk umum bilangan kompleks adalah $a + bi$, dengan a adalah bagian real dan bi adalah bagian imajiner dari bilangan kompleks tersebut. Cara mencari hasil akar pangkat dari bilangan kompleks adalah dengan menggunakan Rumus Euler. Pertama, bentuk $a + bi$ akan dibuat menjadi $r(c + di)$ dengan $c^2 + d^2 = 1$.

Dengan menggunakan $c^2 + d^2 = 1$, c disulihkan dengan $\cos x$ dan d disulihkan dengan $\sin x$ karena $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dan penggunaan $\cos x$ dan $\sin x$ diperlukan dalam Rumus Euler. $a + bi$ bentuknya menjadi $r(\cos x + i \sin x)$ yang dengan menggunakan (16) dapat diubah menjadi

$$a + bi = r(e^{ix}) \quad (21)$$

dengan $r(\cos x) = a$ dan $r(\sin x) = b$

Untuk mencari $(a + bi)^{\frac{1}{n}}$, kedua ruas pada (21) dipangkatkan dengan $\frac{1}{n}$ menjadi

$$(a + bi)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(e^{i\frac{x}{n}}) \quad (22)$$

Ketika x pada (16) disuihkan menjadi $\frac{x}{n}$, maka akan terbentuk persamaan di bawah ini

$$e^{i\frac{x}{n}} = \cos(\frac{x}{n}) + i \sin(\frac{x}{n}) \quad (23)$$

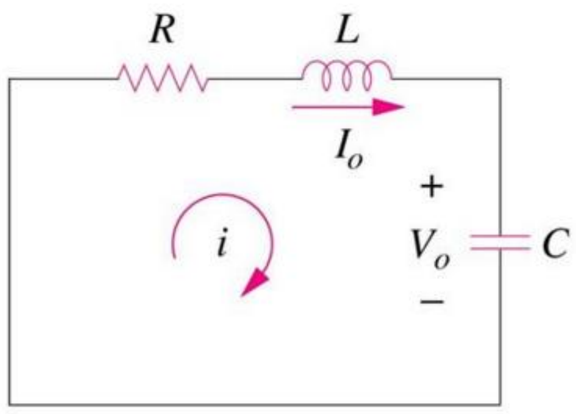
Dari (22) dan (23) didapatkan

$$(a + bi)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{x}{n}) + i \sin(\frac{x}{n})) \quad (24)$$

dengan $\cos x = \frac{a}{r}$ dan $\sin x = \frac{b}{r}$.

C. Analisis rangkaian orde 2 pada *Underdamped Case*

Rangkaian orde 2 adalah rangkaian yang ketika dianalisis, membentuk persamaan yang memiliki perbedaan derajat 2 [3]. Salah satu contoh rangkaian orde 2 adalah rangkain R-L-C, yaitu rangkaian yang terdiri dari resistor, induktor, dan kapasitor.



Gambar 1 Rangkaian orde 2 tanpa sumber

(Sumber : http://slideplayer.com/slide/6379109/)

Untuk mencari arus pada rangkaian, atau tegangan pada salah satu komponen, misalnya kapasitor, diperlukan analisis orde 2. Pada analisis orde 2, salah satu nilai yang dicari, misalnya saja arus. Akan dianggap sebagai patokan. Resistor, induktor, dan kapasitor memiliki perbedaan antara perbandingan tegangan dan arus yang melewatinya.

$$V_R = I_R R$$
$$V_L = L\frac{dI_L}{dt} \qquad (25)$$
$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

Perbedaan perbandingan ini akan membentuk persamaan orde 2 ketika dianalisis. Pada rangkaian orde 2, ketika akan mencari arus yang melewati resistor, seperti pada gambar 1, maka terlebih dahulu ditentukan

$$I = Ae^{st} \qquad (26)$$

Dengan menggunakan (25) dan fakta bahwa gambar 1 adalah rangkaian RLC tanpa sumber, akan didapatkan

$$IR + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int Idt = 0$$

yang ketika diturunkan terhadap t kedua ruasnya menjadi

$$R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0 \qquad (27)$$

Dengan menggunakan (26) pada (27) akan didapatkan

$$RsAe^{st} + Ls^2Ae^{st} + \frac{1}{C}Ae^{st} = 0$$
$$Ae^{st}(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}) = 0 \qquad (28)$$

Persamaan yang terbentuk pada (28) adalah persamaan karakteristik rangkaian. Persamaan (28) diselesaikan dengan menganggap Ae^{st} tidak nol, karena bentuk itu yang akan dicari nilainya. Sehingga, akan dicari s sehingga

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0\,.$$

Ada 3 kemungkinan hasil yang terjadi. Pertama, persamaan (29) memiliki 2 akar real berbeda. Ini adalah *Overdamped Case*. Bentuk solusi I menjadi

$$I(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

Kedua, persamaan (29) memiliki akar real kembar. Ini adalah *Critically Damped Case*. Bentuk solusi I menjadi

$$I(t) = (A_1t + A_2)e^{st}$$

Ketiga, persamaan (29) tidak memiliki akar real. Ini adalah *Underdamped Case*. Pada kasus ini, s akan menjadi bilangan kompleks, sehingga dibutuhkan Identitas euler untuk menyelesaikannya. Misalnya solusi s adalah

$$s_1 = -\alpha + j\omega$$
$$s_2 = -\alpha - j\omega$$

Perhatikan bahwa lambang bilangan imajiner yang dipakai dalam bidang elektro adalah j, bukan i. Sehingga bentuk solusi I menjadi

$$I(t) = A_1 e^{t(-\alpha + j\omega)} + A_2 e^{t(-\alpha - j\omega)}$$
$$I(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega} + A_2 e^{-j\omega}) \qquad (30)$$

Dengan menggunakan (16) pada (30), didapatkan

$$I(t) = e^{-\alpha t}(A_1(\cos\omega + j\sin\omega) + A_2(\cos(-\omega) + j\sin(-\omega))) \qquad (31)$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $\cos(-x) = \cos x$ dan $\sin(-x) = -\sin x$, (31) dapat diubah menjadi

$$I(t) = e^{-\alpha t}(A_1(\cos\omega + j\sin\omega) + A_2(\cos\omega - j\sin\omega))$$
$$I(t) = e^{-\alpha t}((A_1 + A_2)\cos\omega + (A_1 - A_2)\, j\sin\omega) \qquad (32)$$

Persamaan (32) adalah bentuk akhir solusi I untuk *Underdamped Case.* Persamaan (32) juga dapat diubah menjadi

$$I(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega + B_2\, j\sin\omega)$$

dengan

$$B_1 = A_1 + A_2$$
$$B_2 = A_1 - A_2$$

VII. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Tuhan YME untuk segala karunia dan berkatnya selama penulisan makalah. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada bapak Rinaldi Munir dan bapak Judhi Santoso sebagai dosen mata kuliah Aljabar Geometri yang telah memberikan dasar-dasar bilangan kompleks yang dipakai dalam pembuatan makalah ini.

REFERENSI

[1] http://riniftpub.lecture.ub.ac.id/files/2013/12/taylor.pdf
Diakses pada tanggal 15 Desember 2015, pukul 18.30 WIB

[2] http://mathworld.wolfram.com/EulerFormula.html
Diakses pada tanggal 15 Desember 2015, pukul 20.02 WIB

[3] C. K. Alexander and M. N. O. Sadiku, *Fundamental of Electric Circuit,* Fifth ed. New York McGraw-Hill, 2013, ch.8

[4] https://uas201142012.wordpress.com/tag/bilangan-kompleks/
Diakses pada tanggal 15 Desember 2015, pukul 23.32 WIB

[5] http://blog.ivank.net/taylor-polynomial-clarified.html
Diakses pada tanggal 16 Desember 2015, pukul 8.40 WIB

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2015

Richard Wellianto - 13514051