# Pemodelan Grafis Komputer 2D dan 3D Sederhana Menggunakan Aljabar Geometri

Wiega Sonora - 13514019
*Program Studi Informatika*
*Sekolah Teknik Elektro dan Informatika*
*Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia*
*wiegasonora@students.itb.ac.id*

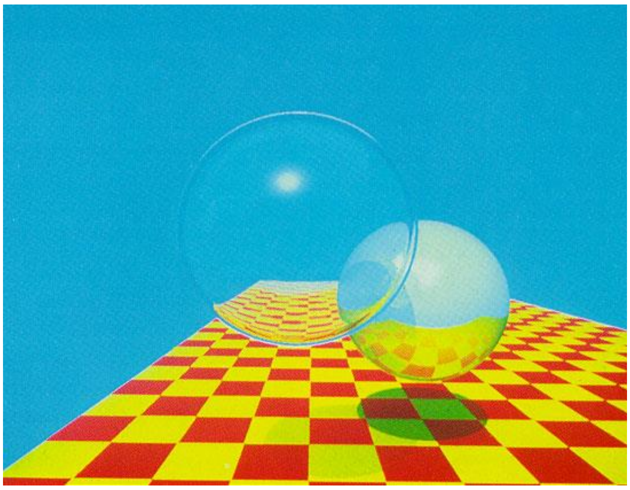
***Abstract*—Dalam membuat grafis pada computer, gambar yang dibuat tidak hanya 2D melainkan juga 3D. Pembuatan grafis 3D bisa memanfaatkan aljabar geometri. Aljabar geometri dalam ruang dimensi tiga cocok untuk merepresentasikan grafis yang dibuat. Grafis 3D biasa dimanfaatkan dalam pembuatan *game*, grafis perangkat lunak, dan lain – lain. Banyak perangkat lunak yang dapat dimanfaatkan dalam pemodelan 3D tersebut, salah satunya adalah GA Viewer.**

***Keywords*—grafis, aljabar geometri, GA Viewer, geometric algebra, 3D**

## I. PENDAHULUAN

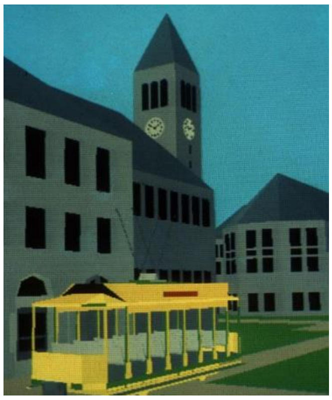
Kebutuhan akan grafis pada komputer semakin banyak. Pembuatan grafis berbasis komputer sering digunakan dalam pembuatan *game*, perangkat lunak, jejaring sosial, dan sebagainya. Grafis komputer pertama kali dikenalkan melalui sebuah perangkat lunak bernama *Sketchpad* buatan Ivan Sutherland sebagai hasil disertasi program Doktoral di Massachusetts Institute of Technology pada tahun 1963. Prinsip kerja perangkat lunak tersebut adalah menghasilkan gambar teknik yang sesuai dengan menggoreskan pena pada layar CRT. Hal tersebut merupakan GUI *(Graphical User Interface)* pertama di dunia.

Semenjak didirikannya *Center of Advanced Visual Studies* di Massachusetts Institute of Technology pada tahun 1967, pengembangan grafis komputer mulai marak. Banyak universitas di Amerika Serikat yang gencar – gencarnya melakukan penelitian mengenai grafis komputer seperti Cornell, Cal Tech, MIT, Harvard, dan sebagainya. Pengembangan komputer grafis ini menimbulkan penemuan – penemuan mengenai algoritma dan program seputar komputer grafis seperti algoritma *ray-trace scene*, pemodelan bulu dan rambut, sistem *paint*, dan lain – lain.



**Gambar 1.Sistem Ray-tracing**

(sumber: https://design.osu.edu/carlson/history/tree/images/pages/turner_jpg.htm diakses pada 15 Desember 2015 pukul 14.05)



**Gambar 2. Cornell Perspective**

(sumber : https://design.osu.edu/carlson/history/tree/images/pages/art-quad_jpg.htm diakses pada 15 Desember 2015 pukul 14.00 )

Pembuatan grafis 3D mungkin dilakukan menggunakan teori aljabar geometri karena memenuhi kaidah 3D yaitu memiliki panjang, luas, dan volume. Pembuatan grafis sederhana tersebut dilakukan menggunakan salah satu dari beberapa perangkat lunak yang tersedia, yaitu GAViewer.

## II. TEORI DASAR

### A. *Teori Dasar Aljabar Geometri*

Pada tahun 1844 ketika Hamilton baru saja menerbitkan penemuannya yang berupa aljabar quaternion, seorang matematikawan asal Jerman yang bernama Hermann Gunther Grassmann meluncurkan edisi pertama dari kalkulus geometrinya berjudul *Lineale Ausdehnungslehre* yang mana sama dengan aljabar untuk menjawab persoalan seputar operasi geometri. Grassman menemukan aljabar yang mana hasil perkaliannya vektornya membentuk panjang, luas, serta volume dan objek dalam dimensi yang lebih tinggi.

**Gambar 3. Grasmann penemu Aljabar Geometri**

(sumber: [http://media-2.web.britannica.com/eb-media/79/116779-004-C5FDEF79.jpg](http://media-2.web.britannica.com/eb-media/79/116779-004-C5FDEF79.jpg) diakses 15 Desember 2015 pukul 20.43)

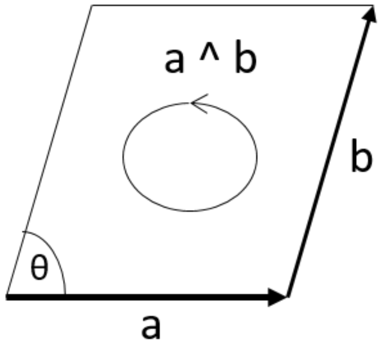
Pada tahun 1861, Grassmann menerbitkan versi yang telah diperbaharui dari bukunya yang berjudul *Die Ausdehnungslehre: Vollstanding und ing streger Form bearbeitet.* Beberapa tahun sesudahnya Grassmann meninggal dunia lalu para ahli matematika baru menyadari bahwa Grassmann merupakan seorang jenius dan karyanya dikembangkan oleh matematikawan asal Inggris, William Kingdon Clifford, hingga menjadi ilmu yang saat ini kita sebut 'Aljabar Geometri'.

a. Sifat Aljabar Geometri

Aljabar geometri mempunyai panjang, luas, serta volume. Luas parallelogram dapat dihitung dari rumus sebagai berikut

$$area = \|a\|\|b\| \sin\theta \qquad (1)$$

dengan area sebagai luas dan $\|a\|$ serta $\|b\|$ skalar. Penggambaran luas dari hasil perkalian kedua vector dapat dilihat di bawah ini




**Gambar 4. Ilustrasi perkalian geometri dua buah vector**

(diadaptasi dari buku *Geometric Algebra for Computer Graphics)*

b. *Outer Product*

Telah kita ketahui bahwa hasil kali kedua vector adalah sebagai berikut

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\| \sin\theta \qquad (2)$$

yang mana $\theta$ merupakan sudut antara dua vector. Perbedaan antara keduanya ialah c*ross product* menghasilkan vector sedangkan *outer product* menghasilkan bivector.

c. Properti aljabar

*Outer product* bersifat antisimetrik yang berarti

$$a \wedge b = -b \wedge a \qquad (3)$$

sehingga urutan berpengaruh pada hasil kali keduanya. Meskipun antisimetrik, bivektor bersifat seperti perkalian skalar, sebagai berikut

skalar: $a\,.\,(\mathrm{b}+\mathrm{c}) = a\,.\,b + a\,.\,c \qquad (4)$

*outer:* $a \wedge (\mathrm{b}+\mathrm{c}) = a \wedge b + a \wedge c \qquad (5)$

sehingga sifat distribusi berlaku sesuai rumus di atas.

### B. Teori Dasar Perkalian Geometri

Perkalian geometri atau biasa disebut *geometric product* mengoperasikan multivektor yang terdiri dari skalar, vector, luas, dan volume. Teori ini dikembangkan oleh W.K. Clifford.

**Gambar 5. William Kingdon Clifford**

(sumber: https://sciencevspseudoscience.files.wordpress.com/2011/12/clifford_2.png diakses pada 15 Desember pukul 21.05)

a. Definisi Perkalian Geometri

Menurut W.K Clifford, matematikawan asal Inggris yang mengembangkan teori besutan Grassmann, perkalian geometri didefinisikan dalam rumus di bawah ini

$$ab = a.b + a \wedge b \tag{6}$$

sehingga perkalian geometri merupakan penjumlahan dari sebuah skalar dan sebuah bivektor.

b. Sifat – sifat

Perkalian geometri memiliki beberapa sifat matematika seperti asosiatif, distributif, dan modulus.

Asosiatif berarti pengutamaan dalam perkalian dapat ditukar urutannya. Untuk lebih jelasnya cermati persamaan di bawah ini

$$a(\mathrm{bc}) = (\mathrm{ab})\mathrm{c} = \mathrm{abc} \tag{7}$$

$$(\lambda a)b = \lambda(ab) = \lambda ab \tag{8}$$

yang mana λ merupakan suatu konstanta.

Distributif berarti perkalian tersebut dapat didistribusikan layaknya perkalian skalar.

$$a(\mathrm{b}+\mathrm{c}) = ab + ac \tag{9}$$

Modulus berarti kuadrat dari vector merupakan kuadrat dari panjang vector

$$a^2 = \pm\|a\|^2 \tag{10}$$

Ortogonal vector memiliki sifat antikomutatif

$$a\mathrm{b} = -\mathrm{ba} \tag{11}$$

c. Basis Vektor

Basis vector pada perkalian geometri sering ditulis sebagai $e_1e_2e_1$ yang biasa disingkat $e_{121}$. Secara umum, basis vector ditulis

$$e_ie_je_k \equiv e_{ijk} \tag{12}$$

Pada perkalian $e_1e_1$:

$$e_1e_1 = e_1.e_1 + e_1 \wedge e_1 \tag{13}$$

karena $e_1.e_1 = 1$ sedangkan $e_1 \wedge e_1 = 0$ maka

$$e_1e_1 = e_1^2 = 1 \tag{14}$$

Pada kasus $e_1e_2$:

$$e_1e_2 = e_1 \wedge e_2 \tag{15}$$

karena $e_1.e_2 = 0$

Basis vector bersifat antikomutatif sehingga

$$e_1e_2 = -e_2 \wedge e_1 = -e_{21} \tag{16}$$

d. Basis Vektor pada Dimensi Tiga

Selain bisa diterapkan dalam dimensi dua, basis vector pada perkalian geometri dapat diterapkan pada dimensi tiga.

Pada dimensi tiga, basis vector yang berlaku ialah $e_1$, $e_2$, dan $e_3$. Perkaliannya mirip seperti dimensi dua yaitu

$$e_1e_3 = e_1 \wedge e_3 \tag{17}$$

$$e_1e_3 = -e_3 \wedge e_1 \tag{18}$$

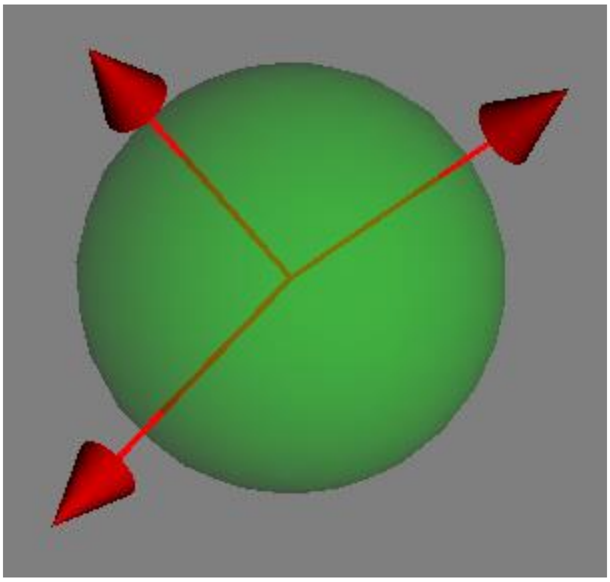
Pada dimensi tiga, berlaku

$$a.B = \frac{1}{2}(aB - Ba) \tag{19}$$

$$a \wedge B = \frac{1}{2}(aB + Ba) \tag{20}$$

dengan B merupakan bivektor.

## III. Pembahasan



**Gambar 6. Ilustrasi Pemodelan 3D Sederhana Menggunakan GAViewer**

Contoh pemodelan 3D mengunakan GAViewer dapat dilihat pada gambar di atas. Pemodelan tersebut memenuhi perkalian geometri a^b^c dimana

$$a = e_1 + e_2 + e_3$$

$$b = e_1 - e_2 + e_3$$

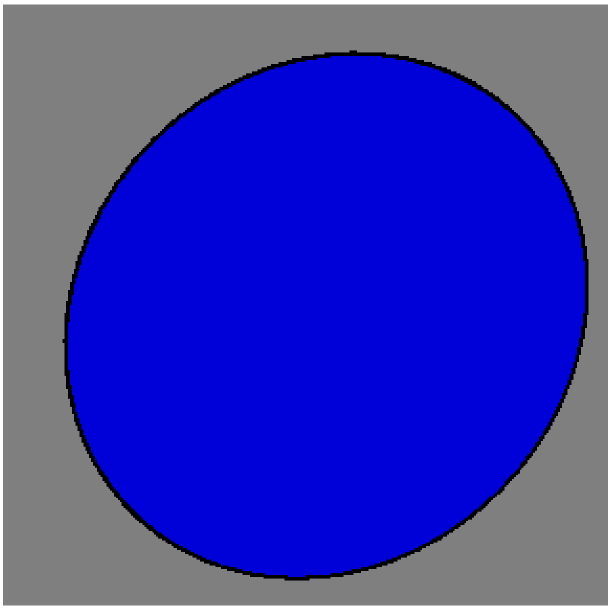
$$c = e_1 + e_2 - e_3$$

sehingga

$$a \wedge b \wedge c = 4e_{123}$$

dan membentuk pola 3D *sphere.*

Contoh lain pada pemodelan 2D menghasilkan bentuk seperti berikut



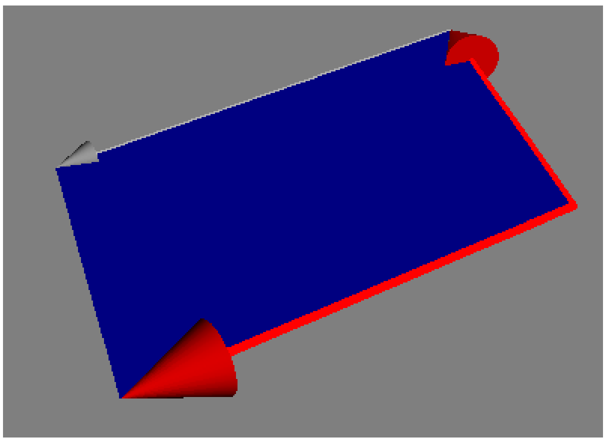
**Gambar 7. Pemodelan 2D**

Pada pemodelan 2D di atas, gambar tersebut dihasilkan dari hasil kali geometri

$$a = e_1 + e_2 + 3e_3$$

$$b = e_1 + 2e_2 - e_3$$

$$a \wedge b = 2e_{31} - 5e_{23} + e_{12}$$



**Gambar 8. Pemodelan Luas Area**

Pada gambar di atas, pemodelan berhasil menunjukkan luas area yang dihasilkan akibat perkalian geometri dari a ^ b dengan

$$a = e_1 + 2e_2 - 3e_3$$

$$b = 2e_1 - e_2 + 2e_3$$

## IV. KESIMPULAN

Tingginya kebutuhan untuk menciptakan grafis komputer baik dalam 2D maupun 3D mendorong munculnya metode – metode yang dihasilkan. Salah satunya, dengan pemanfaatan teori matematika berupa aljabar geometri. Dalam ilmu aljabar geometri terdapat teori perkalian geometri yang menghasilkan panjang, luas, serta volume sehingga memenuhi kaidah 2D maupun 3D dan dapat digunakan untuk menjawab persoalan pemodelan dengan grafis komputer.

## V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pertama – tama saya mengucapkan terima kasih kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga makalah Matematika Diskrit ini dapat diselesaikan tepat waktu. Saya juga mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua saya yang selalu memberi dukungan dan doa restu kepada saya sehingga dapat menempuh pendidikan sampai saat ini. Tak lupa saya juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Ir. Rinaldi Munir, MT. serta Bapak Drs. Judhi Santoso M.Sc. yang berperan sebagai dosen mata kuliah IF 2123 Aljabar Geometri sehingga dengan ilmu pengetahuan seputar Aljabar Geometri, saya dapat membuat dan menyelesaikan makalah ini.

## REFERENSI


[1] https://design.osu.edu/carlson/history/lesson6.html diakses pada 15 Desember 2015pukul 15.32

[2] http://geometricalgebra.net/ diakses pada 15 Desember 2015 pukul 16.00

[3] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Clifford.html diakses pada 15 Desember 2015 pukul 17.03

[4] http://arxiv.org/abs/1306.1660 diakses ada 15 Desember 2015 pukul 18.25

[5] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Grassmann.html diakses pada 15 Desember 2015 pukul 17.00

[6] John Vince, *Geometric Algebra for Computer Graphics*, Springer, 2008.

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015

Wiega Sonora - 13514019