Aplikasi Aljabar Lanjar pada Metode Numerik

IF2123 Aljabar Geometri

Oleh: Rinaldi Munir
Program Studi Informatika, STEI-ITB

Apa itu Metode Numerik?

- Numerik: berhubungan dengan angka
- Metode: cara yang sistematis untuk menyelesaikan persoalan guna mencapai tujuan yang ditentukan

- Metode numerik: cara sistematis untuk menyelesaikan persoalan matematika dengan operasi angka (+, -, *, /)

- Cara penyelesaian persoalan matematika ada dua:

  1. Secara analitik → solusinya eksak (tepat)
  2. Secara numeric → solusinya hampiran (aproksimasi)

- *Secara analitik*: menggunakan rumus dan teorema yang sudah baku di dalam matematika → metode analitik

- *Secara numerik*: menggunakan pendekatan aproksimasi untuk mencari solusi hanya dengan operasi aritmetika biasa → metode numerik.

- Contoh: Menghitung integral $\int_{-1}^{1}(4-x^2)dx$

Metode analitik:

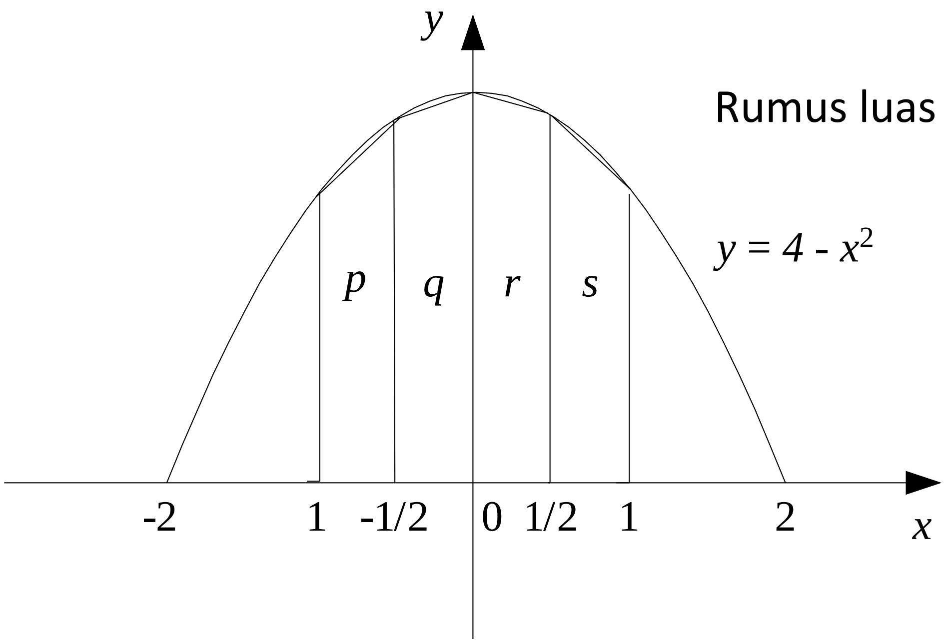
Rumus: $\int ax^n dx = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + C$

$$\int_{-1}^{1}(4-x^2)dx = [4x - \frac{1}{3}x^3]_{x=-1}^{x=1}$$

$$= [4(1) - \frac{1}{3}(1)] - [4(-1) - \frac{1}{3}(-1)] = 22/3 = 7.33$$

- *Metode numerik*

  Nilai integral = luas daerah di bawah kurva



Rumus luas trapesium = (jumlah sisi sejajar x tinggi)/2

$$\int_{-1}^{1}(4-x^2)dx \approx \text{p + q + r + s} \approx \{[f(-1) + f(-1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(-1/2) + f(0)] \times 0.5/2\} + \{[f(0) + f(1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(1/2) + f(1)] \times 0.5/2\}$$

$$\approx 0.5/2\ \{f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)\}$$

$$\approx 0.5/2\ \{3 + 7.5 + 8 + 7.5 + 3\}$$

$$\approx 7.25$$

- Solusi dengan metode numerik adalah solusi hampiran (aproksimasi)

- Hampiran terhadap solusi eksak

- Oleh karena itu, solusi numerik mengandung galat.

- **Galat** (ε): perbedaan antara solusi hampiran dengan solusi eksak.

- Definisi: $\varepsilon = a - \hat{a}$

- Salah satu sumber galat adalah galat pembulatan (*rounding error*).

- **Galat pembulatan**: galat yang timbul akibat keterbatasan komputer dalam merepresentasikan bilangan riil.

- **Contoh 6:** 1/6 = 0.1666666666… , dalam mesin dengan 6-digit direpresentasikan sebagai 0.166667.

  Galat pembulatan = 1/6 – 0.166667 = -0.000000333.

- Contoh dalam sistem biner misalnya 1/10 = $0.000110011001100110011001100110011\ldots_2$ direpresentasikan di dalam komputer dalam jumlah bit yang terbatas.

Representasi bilangan riil di dalam komputer:

1. Bilangan titik-tetap (*fixed-point*)

   Setiap bilangan riil disajikan dengan jumlah tempat desimal yang tetap

   Contoh: 62.358, 0.013, 1.000.

2. Bilangan titik-kambang (*floating-point*)

   Setiap bilangan riil disajikan dengan jumlah digit *berarti* yang sudah tetap

   Contoh: 0.6238×10^{3} , 0.1714×10^{-13}

Bilangan Titik-Kambang

- Bilangan riil di dalam komputer umumnya disajikan dalam format *bilangan titik-kambang*
- Bilangan titik-kambang a ditulis sebagai

$$a = \pm\, m \times B^p = \pm\, 0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6 \ldots d_n \times B^p$$

m = mantisa (riil), $d_1d_2d_3d_4d_5d_6 \ldots d_n$ adalah digit mantisa.

B = basis sistem bilangan yang dipakai (2, 8, 10, 16, dsb)

p = pangkat (berupa bilangan bulat), dari $-P_{\text{min}}$ sampai $+P_{\text{maks}}$

- Contoh: 245.7654 → 0.2457654×10^3

Pembulatan pada Bilangan Titik-Kambang

- Bilangan riil di dalam komputer mempunyai rentang nilai yang terbatas.

- Bilangan titik-kambang yang tidak dapat mencocoki satu dari nilai-nilai di dalam rentang nilai yang tersedia, dibulatkan ke salah satu nilai di dalam rentang.

- Galat yang timbul akibat penghampiran tersebut diacu sebagai **galat pembulatan**.

Pembulatan ke digit terdekat (*in-rounding*)

Misalkan $a = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_n d_{n+1} \ldots \times 10^p$

$fl_{\text{round}}(a) = \pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots \hat{d}_n \times 10^p$

$$\hat{d}_n = \begin{cases} d_n & \text{, jika } d_{n+1} < 5 \\ d_n + 1 & \text{, jika } d_{n+1} > 5 \\ d_n & \text{, jika } d_{n+1} = 5 \text{ dan } n \text{ genap} \\ d_n + 1 & \text{, jika } d_{n+1} = 5 \text{ dan } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

- **Contoh**: $a = 0.5682785715287 \times 10^{-4}$:
  - di dalam komputer dengan mantissa 7 digit dibulatkan menjadi $fl_{round}(a) = 0.5682786 \times 10^{-4}$
  - di dalam komputer dengan mantissa 8 digit dibulatkan menjadi $fl_{round}(a) = 0.56827857 \times 10^{-4}$
  - di dalam komputer dengan mantissa 6 digit dibulatkan menjadi $fl_{round}(a) = 0.568278 \times 10^{-4}$
  - di dalam komputer dengan mantissa 9 digit dibulatkan menjadi $fl_{round}(a) = 0.568278572 \times 10^{-4}$

Dua persoalan matematika yang akan diselesaikan secara numerik berdasarkan teori di dalam aljabar lanjar:

1. **Solusi sistem persamaan lanjar**
2. **Interpolasi polinom**

Sistem Persamaan Lanjar (SPL)

- **Persoalan**: Carilah solusi X yang memenuhi sistem persamaan lanjar

  $$AX = B,$$

  yang dalam hal ini,

  $A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$

  $X = [x_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$

  $B = [b_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$ (vektor kolom)

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Pemecahan SPL secara numerik

- Aspabila SPL diselesaikan dengan computer, maka akan timbul galat pembulatan pada solusinya karena operasi aritmerika bilangan titik-kambang.

- Untuk memperoleh solusi SPl yang mengandung galat yang minimal akibat pembulatan, maka digunakan *tatancang pemorosan* (*pivoting strategy*).

  (*pivot* = poros, *pivoting* = pemorosan)

Tatancang pemorosan: Pilih *pivot* dari semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar,

$$| a_{k\,,\,p} | = \max\{|a_{p,p}|,\ |a_{p+1,p}|, \ldots,\ |a_{n-1,p}|, |a_{n,p}|\}$$

- lalu pertukarkan baris ke-k dengan baris ke-p.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right]$$

Cari $|x|$ terbesar, lalu pertukarkan barisnya dengan baris ke-2

Contoh: Selesaikan SPL berikut dengan metode eliminasi Gauss yang menerapkan tatancang pemorosan:

$$0.00044x_1 + 0.0003x_2 - 0.0001x_3 = 0.00046$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 = 1.5$$
$$3x_1 - 9.2x_2 - 0.5x_3 = -8.2$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 0.00044 & 0.0003 & -0.0001 & 0.00046 \\ 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ 3 & -9.2 & -0.5 & -8.2 \end{bmatrix} R1 \leftrightarrow R2 \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1.5 \\ 0.00044 & 0.0003 & -0.0001 & 0.00046 \\ 3 & -9.2 & -0.5 & -8.2 \end{bmatrix}$$

$$R1/4 \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0.00044 & 0.0003 & -0.0001 & 0.00046 \\ 3 & -9.2 & -0.5 & -8.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R2 - 0.00044R1 \\ R3 - 3R1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 0.000190 & -0.00021 & 0.000295 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \end{bmatrix}$$

$$R2 \leftrightarrow R3 \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & -9.95 & -1.25 & -9.32 \\ 0 & 0.000190 & -0.00021 & 0.000295 \end{bmatrix} R2/(-9.95) \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 1 & 0.126 & 0.937 \\ 0 & 0.000190 & -0.00021 & 0.000295 \end{bmatrix}$$

$$R3 - 0.000190R2 \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 1 & 0.126 & 0.937 \\ 0 & 0 & -0.000234 & 0.000117 \end{bmatrix} R3/(-0.000234) \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 1 & 0.126 & 0.937 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 &= 0.375 \\ x_2 + 0.126x_3 &= 0.937 \\ x_3 &= -0.5 \end{aligned}$$

Selesaikan dengan teknik sulih mundur, diperoleh:

$$x_1 = 0.250; \quad x_2 = 1.00; \quad x_3 = -0.500$$

Jika SPL di atas diselesaikan tanpa tatancang pemorosan, maka solusinya:

$$x_1 = 0.245; \quad x_2 = 1.01; \quad x_3 = -0.492$$

Bandingkan dengan solusi eksaknya adalah:

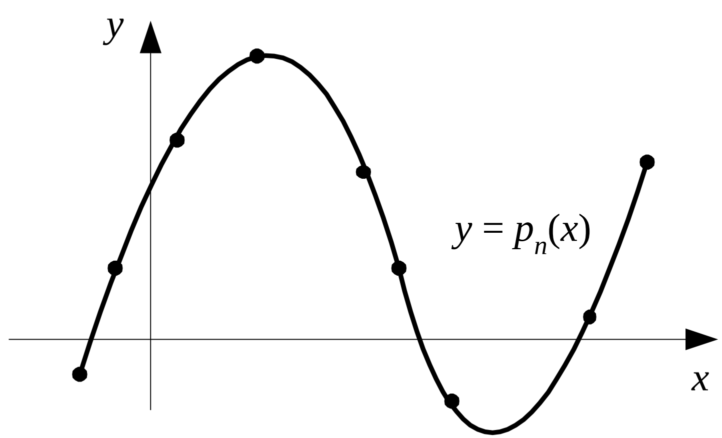
$$x_1 = ¼; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1/2$$

Interpolasi

Persoalan: Diberikan $n+1$ buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga

$$y_i = p_n(x_i) \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di $x = a$, yaitu $y = p_n(a)$.



Contoh persoalan interpolasi:

Sebuah pengukuran fisika telah dilakukan untuk menentukan hubungan antara tegangan yang diberikan kepada baja tahan-karat dan waktu yang diperlukan hingga baja tersebut patah. Delapan nilai tegangan yang berbeda dicobakan, dan data yang dihasilkan adalah [CHA91]:

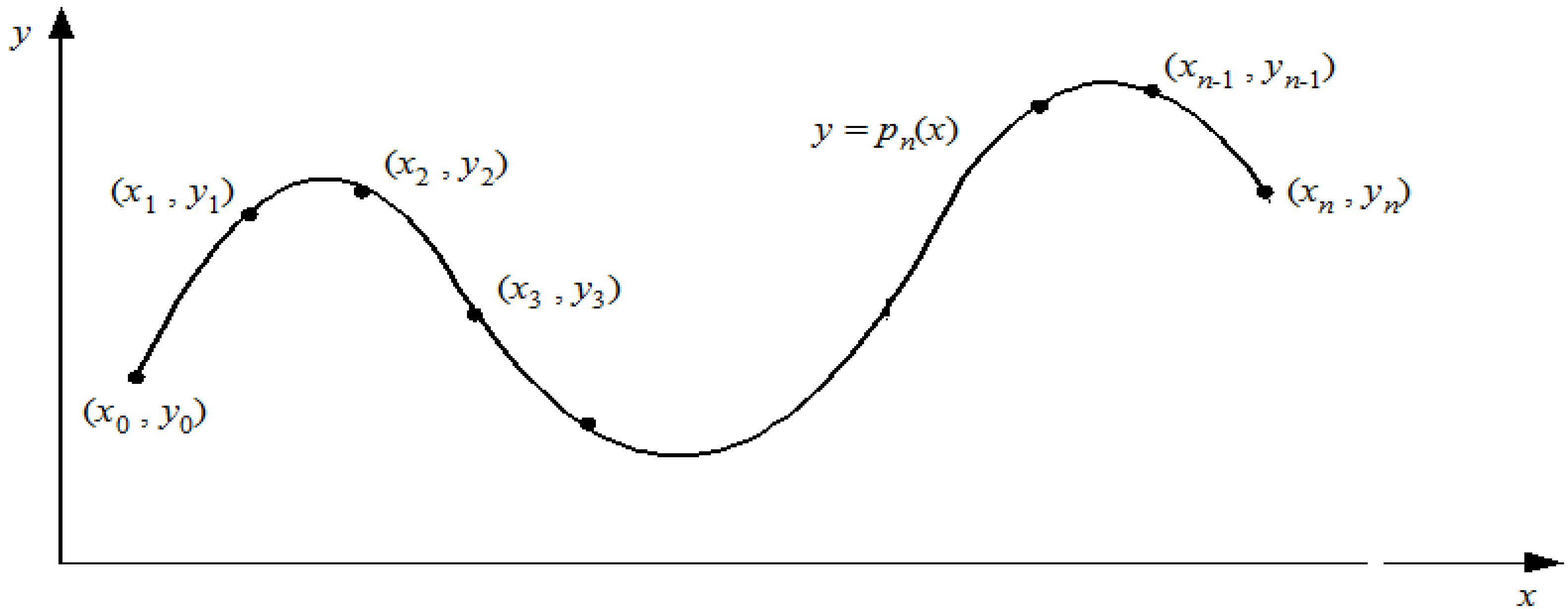
Tegangan yang diterapkan, *x*, kg/mm^2	5	10	15	20	25	30	35	40
Waktu patah, *y*, jam	40	30	25	40	18	20	22	15

Persoalan: Berapa waktu patah *y* jika tegangan *x* yang diberikan kepada baja adalah 12 kg/mm^2.

Interpolasi

- Polinom interpolasi derajat *n* yang menginterplolasi titik-titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ adalah

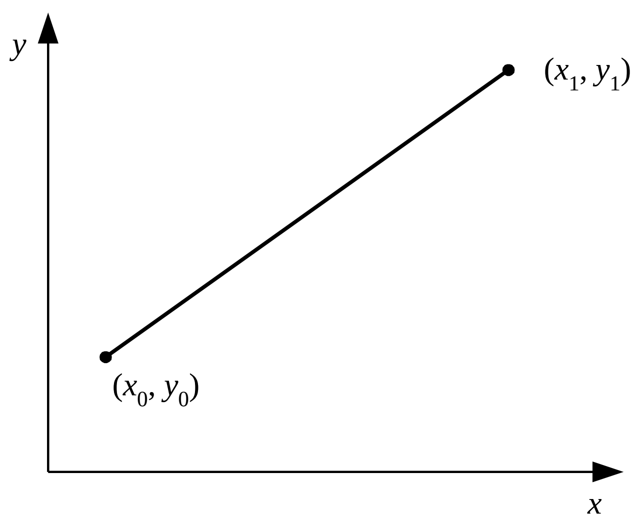
$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx^n$$



1. Interpolasi Lanjar

- Interpolasi lanjar adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus.
- Misal diberikan dua buah titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$



$$y_0 = a_0 + a_1 x_0$$
$$y_1 = a_0 + a_1 x_1$$

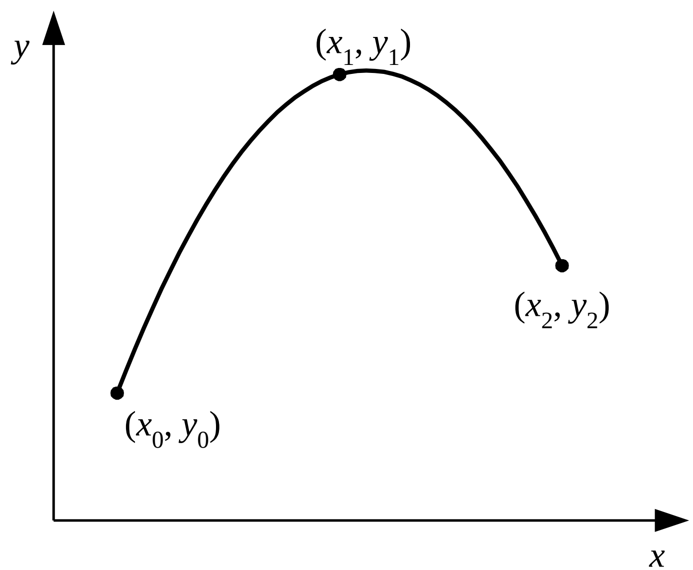
Pecahkan SPL ini dengan metode eliminasi Gauss untuk memperoleh nilai a_0 dan a_1

2. Interpolasi Kuadratik

- Misal diberikan tiga buah titik data, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2).
- Polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

- Bila digambar, kurva polinom kuadrat berbentuk parabola



- Polinom $p_2(x)$ ditentukan dengan cara berikut:
  1) Sulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan $p_2(x)$, $i = 0, 1, 2$. Dari sini diperoleh tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0, a_1, dan a_2:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

  2) hitung a_0, a_1, a_2 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

Contoh: Diberikan titik (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik dan estimasi nilai fungsi di x = 9.2.

Penyelesaian:

Sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$
$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$
$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_3 = -0.0064$. Polinom kuadratnya adalah

$$p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$$

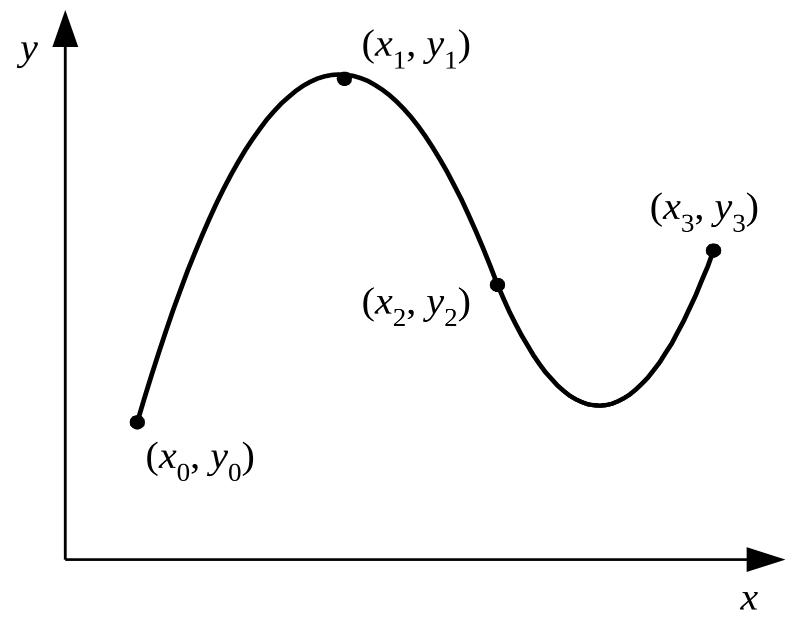
sehingga

$$p_2(9.2) = 2.2192$$

3. **Interpolasi Kubik**

- Misal diberikan empat buah titik data, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3).
- Polinom yang menginterpolasi keempat buah titik itu adalah polinom kubik yang berbentuk:

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$



- Polinom $p_3(x)$ ditentukan dengan cara berikut:
  1) sulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan (P.5.9) , i = 0, 1, 2, 3. Dari sini diperoleh empat buah persamaan dengan empat buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0 , a_1 , a_2 , dan a_3:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$$
$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$$

  2) hitung a_0, a_1, a_2, dan a_3 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

- Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat *n* untuk *n* yang lebih tinggi:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \ldots + a_n x^n$$

asalkan tersedia (*n*+1) buah titik data.

- Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persmaan polinom di atas $y = p_n(x)$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, akan diperoleh *n* buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^3 = y_0 \\
&a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^3 = y_1 \\
&a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^3 = y_2 \\
&\ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
&a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^3 = y_n
\end{aligned}$$

- Solusi sistem persamaan lanjar ini diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari.