Skema Pembagian Data Rahasia

(*Secret Sharing Scheme*)

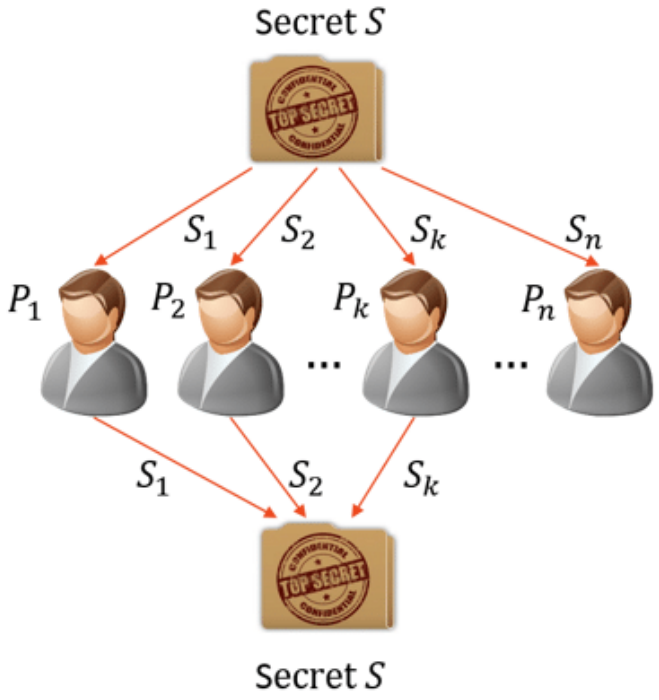
- Misalkan anda memiliki PIN kartu ATM di sebuah bank. PIN tersebut tentu saja rahasia.
- Sebelum meninggal dunia, Anda ingin membagi (*sharing*) PIN itu kepada enam orang anak anda menjadi enam bagian.
- Namun Anda mensyaratkan untuk merekonstruksi enam bagian menjadi PIN semula dibutuhkan *sedikitnya* tiga orang anak untuk merangkai bagian-bagiannya menjadi PIN yang utuh.
- Bagaimana cara melakukan pembagian ini?

➔ *Secret sharing schemes*!!!

Terminologi

- *Secret*: data/informasi rahasia (*password*, kunci, PIN, pesan, file, dsb).

- *Secret* direpresentasikan sebagai sebuah *integer S*.
  Contoh: ‘`abcd`’ dinyatakan sebagai `102030405`
  `(A = 01, B = 02, C = 03,dst)`

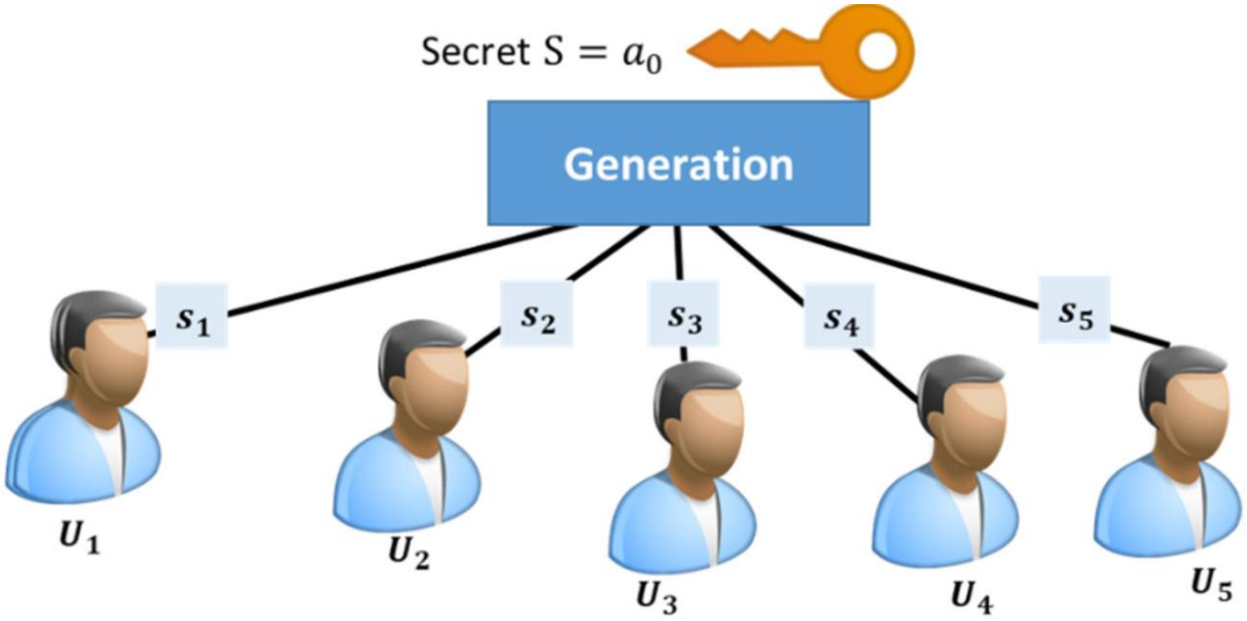


- *Share*: hasil pembagian *secret* (S_1, S_2, …, S_n)
- *Dealer*: pihak yang melakukan pembagian *secret*
- Partisipan: orang yang memperoleh *share* (P_1, P_2, …, P_n)

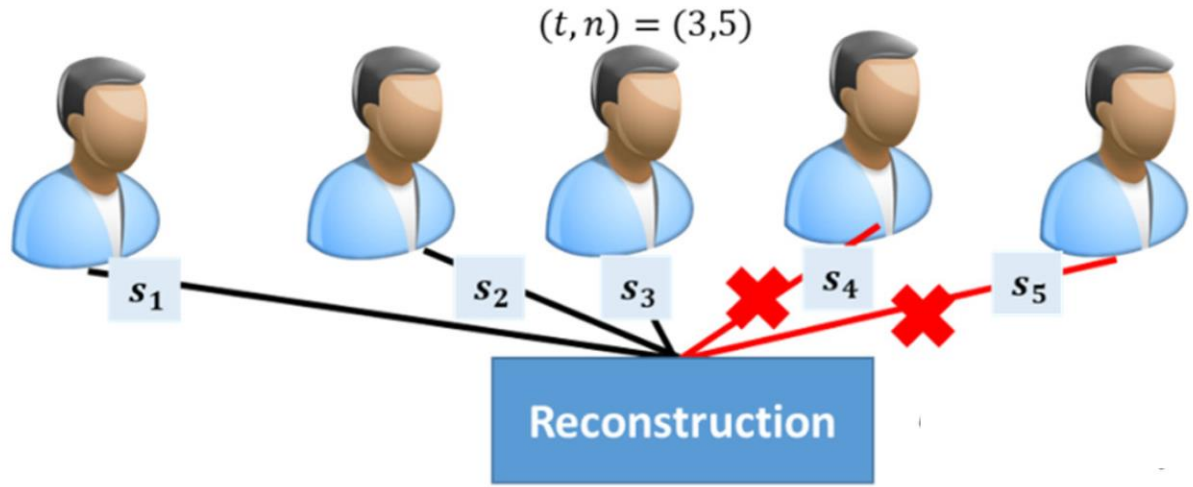
Skema Ambang (*threshold schemes*)

- Misalkan t, n adalah bilangan bulat positif dengan $t \leq n$.
- Skema ambang (t, n) adalah metode pembagian *secret* S kepada n partisipan sedemikian sehingga sembarang himpunan bagian yang terdiri dari t partisipan dapat merekonstruksi S, tetapi jika kurang dari t maka S tidak dapat direkonstruksi.

- Ditemukan oleh Shamir (1979), dikenal sebagai skema ambang Shamir (*Shamir threshold scheme*).



(t, n) threshold Shamir secret sharing reconstruction , more than or equal to t secret shares can combined together to recover the secret key S



Sumber: https://www.mdpi.com/1424-8220/22/1/331

Adi Shamir

Programming Techniques

R. Rivest Editor

How to Share a Secret

Adi Shamir
Massachusetts Institute of Technology

In this paper we show how to divide data D into n pieces in such a way that D is easily reconstructable from any k pieces, but even complete knowledge of $k-1$ pieces reveals absolutely no information about D. This technique enables the construction of robust key management schemes for cryptographic systems that can function securely and reliably even when misfortunes destroy half the pieces and security breaches expose all but one of the remaining pieces.

Key Words and Phrases: cryptography, key management, interpolation

CR Categories: 5:39, 5.6

tion) and in which nonmechanical solutions (which manipulate this data) are also allowed. Our goal is to divide D into n pieces $D_1, \ldots, D_n$ in such a way that:

(1) knowledge of any k or more D_i pieces makes D easily computable;
(2) knowledge of any $k-1$ or fewer D_i pieces leaves D completely undetermined (in the sense that all its possible values are equally likely).

Such a scheme is called a *(k, n) threshold scheme.*

Efficient threshold schemes can be very helpful in the management of cryptographic keys. In order to protect data we can encrypt it, but in order to protect the encryption key we need a different method (further encryptions change the problem rather than solve it). The most secure key management scheme keeps the key in a single, well-guarded location (a computer, a human brain, or a safe). This scheme is highly unreliable since a single misfortune (a computer breakdown, sudden death, or sabotage) can make the information inaccessible. An obvious solution is to store multiple copies of the key at different locations, but this increases the danger of security breaches (computer penetration, betrayal, or human errors). By using a (k, n) threshold scheme with $n = 2k-1$ we get a very robust key management scheme: We can recover the original key even when $\lfloor n/2 \rfloor = k-1$ of the n

Skema Shamir (*t*, *n*)

Algoritma:

1. Pilih bilangan prima *p*, yang harus lebih besar dari semua kemungkinan nilai *secret S* dan juga lebih besar dari jumlah *n* partisipan. Semua komputasi dilakukan dalam modulus *p*.

2. Pilih $t - 1$ buah bilangan bulat acak dalam modulus *p*, misalkan a_1, a_2, …, a_{t-1}, dan nyatakan polinomial:

$$f(x) \equiv S + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{t-1} x^{t-1} \pmod{p}$$

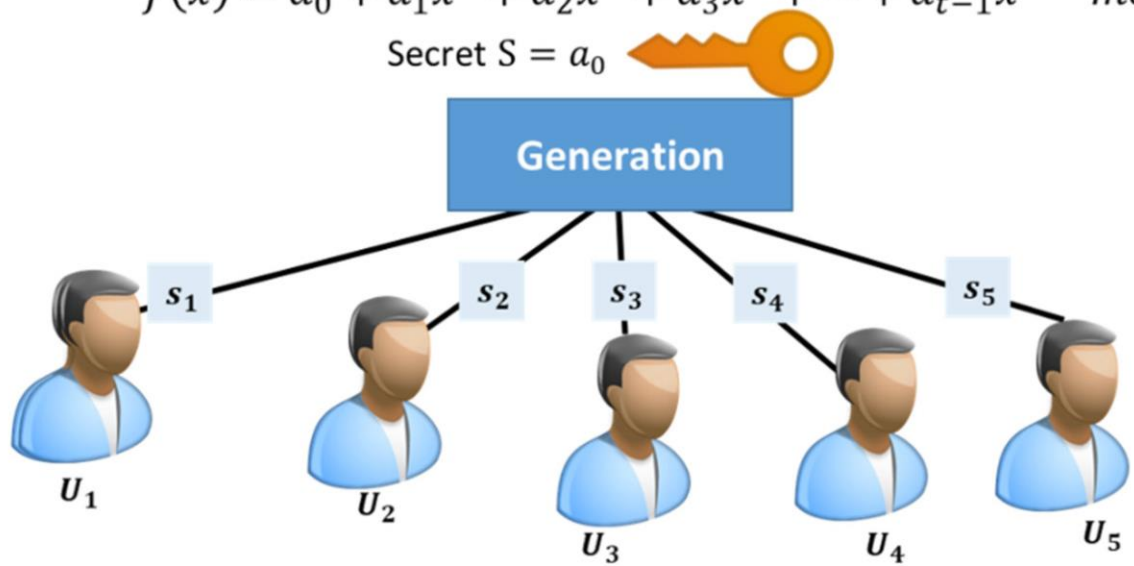
sedemikian sehingga $f(0) \equiv S \pmod{p}$.

3. Untuk n partisipan, kita pilih *integer* berbeda, $x_1, x_2, \ldots, x_n \pmod{p}$ dan setiap orang memperoleh *share* (x_i, y_i) yang dalam hal ini

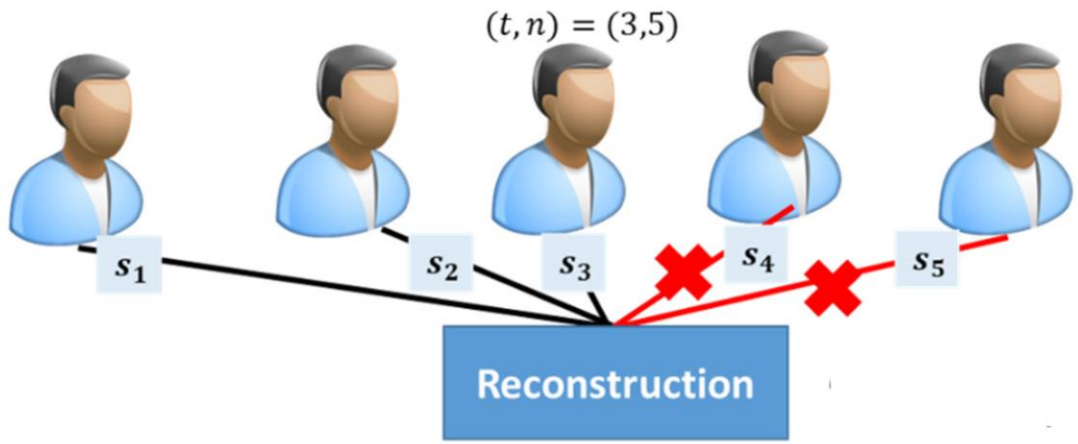
$$y_i \equiv f(x_i) \pmod{p}.$$

Misalnya, untuk n orang kita memilih $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n = n$.

$$f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{t-1}x^{t-1}\ mod(p)$$



(t, n) threshold Shamir secret sharing reconstruction , more than or equal to t secret shares can combined together to recover the secret key S



Contoh 1: Skema Shamir (4, 3)

- Artinya: secret S dibagi kepada $n = 4$ partisipan, dan untuk melakukan rekonstruksi S diperlukan $t = 3$ partisipan S.
- Misalkan $S =$ 1954 (*secret*)
- Misalkan $p =$ 1973 (prima) ($p > S$)
- Pilih 3 – 1 = 2 buah bilangan acak, $a_1 = 43$, $a_2 = 12$ utuk membentuk polinom:

$$f(x) \equiv S + a_1 x + a_2 x^2 \pmod{p}$$

$$f(x) \equiv 1954 + 43x + 12x^2 \pmod{1973}$$

Polinom $f(x)$ harus dirahasiakan!

- Tiap partisipan memperoleh $(x, f(x))$. Misakan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, maka, setiap orang memperoleh *share* sebagai berikut:

$f(x) \equiv 1954 + 43x + 12x^2 \pmod{1973}$

$x = 1 \rightarrow f(1) \equiv 1954 + 43*1 + 12*1^2 \pmod{1973} \equiv 2009 \bmod 1973 = 36 \rightarrow (1, 36)$

$x = 2 \rightarrow f(2) \equiv 1954 + 43*2 + 12*2^2 \pmod{1973} \equiv 2088 \bmod 1973 = 115 \rightarrow (2, 115)$

$x = 3 \rightarrow f(3) \equiv 1954 + 43*3 + 12*3^2 \pmod{1973} \equiv 2191 \bmod 1973 = 224 \rightarrow (3, 224)$

$x = 4 \rightarrow f(4) \equiv 1954 + 43*4 + 12*4^2 \pmod{1973} \equiv 2318 \bmod 1973 = 345 \rightarrow (4, 345)$

Jadi,

share 1 = (1, 36), share 2 = (2, 115), share 3 = (3, 224), share 4 = (4, 345)

Misalkan *t* orang partisipan akan merekonstruksi *S*, dengan *share* masing-masing:

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_t, y_t)$.

Substitusikan setiap (x_k, y_k) ke dalam polinomial:

$$f(x) \equiv S + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{t-1} x^{t-1} \pmod{p}$$

Ini berarti:

$$y_k \equiv f(x_k) \equiv S + a_1 x_k + a_2 x_k^2 \ldots + a_{t-1} x_k^{t-1} \pmod{p}, \qquad 1 \leq k \leq t$$

Diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{t-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{t-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_t & \dots & x_t^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} \pmod{p}$$

Selesaikan sistem persamaan linier di atas, misalnya dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, untuk memperoleh *M*.

Catatan: *p* tidak perlu rahasia, tetapi polinom *f*(*x*) dirahasiakan.

- Misalkan t = 3 partisipan yaitu partisipan 1, 2, dan 4 ingin merekonstruksi S:
  Share mereka: $s_1 = (1, 36)$, $s_2 = (2, 115)$, $s_4 = (4, 345)$
- Substitusikan setiap *share* ke dalam polinom:

$$f(x) \equiv S + a_1 x + a_2 x^2 \pmod{p}$$

$s_1 = (1, 36) \rightarrow \quad S + a_1 + a_2 = 36$

$s_2 = (2, 115) \rightarrow \quad S + 2a_1 + 4a_2 = 115$

$s_4 = (4, 345) \rightarrow \quad S + 4a_1 + 16a_2 = 345$

- Lalu pecahkan sistem persamaan linier:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 115 \\ 345 \end{pmatrix} \pmod{1973}$$

yang menghasilkan solusi

$(S, a_1, a_2) = (1954, 43, 12)$

Secret yang dicari adalah 1954

Contoh 2: Skema Shamir (3, 8)

- Artinya: secret S dibagi kepada n = 8 partisipan, dan untuk melakukan rekonstruksi S diperlukan t = 3 partisipan S.
- Misalkan S = "TFDSFU" $\rightarrow$ ubah ke integer S = 190503180520 (*secret*)

A = 0, B = 1, C = 2, D = 3, E = 4, F = 5, G = 6, H = 7, I = 8, J = 9, K = 10, L = 11, M = 12, N = 13,
O = 14, P = 15, Q = 16, R = 17, S = 18, T = 19, U = 20, V = 21, W = 22, X = 23, Y = 24, Z = 25

- Misalkan p = 1234567890133 (prima) ($p > S$)
- Pilih 3 – 1 = 2 buah bilangan acak, a_1 = 482943028839, a_2 = 1206749628665 untuk membentuk polinom:

$$f(x) \equiv S + a_1 x + a_2 x^2 \pmod{p}$$

$$f(x) \equiv 190503180520 + 482943028839x + 1206749628665x^2 \pmod{1234567890133}$$

Polinom $f(x)$ harus dirahasiakan!

- Tiap partisipan memperoleh $(x, f(x))$. Misakan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_8 = 8$, maka, setiap orang memperoleh *share*:

  $f(x) \equiv 190503180520 + 482943028839x + 1206749628665x^2 \pmod{1234567890133}$

  x = 1 → f(1) = 645627947891, diperoleh *share* 1 = (1, 645627947891)

  x = 2 → f(2) = 1045116192326, diperoleh *share* 2 = (2, 1045116192326)

  …dst untuk x = 3, 4, 5, 6, 7, 8 diperoleh:

  share 3 = (3, 154400023692)

  share 4 = (4, 442615222255)

  share 5 = (5, 675193897882)

  share 6 = (6, 852136050573)

  share 7 = (7, 973441680328)

  share 8 = (8, 1039110787147)

- Misalkan t = 3 partisipan yaitu partisipan 2, 3, dan 7 ingin merekonstruksi S:

  Share mereka: s_1 = (2, 1045116192326), s_2 = (3, 154400023692), s_3 = (7, 973441680328)
- Substitusikan setiap *share* ke dalam:

$$y_k \equiv f(x_k) \equiv S + a_1 x_k + a_2 x_k^2 \ldots + a_{t-1} x_k^{t-1} (\mathrm{mod}\, p), \qquad 1 \leq k \leq t$$

s_1 = (2, 1045116192326) $\rightarrow$ $S + 2a_1 + 4a_2 = 1045116192326$

s_2 = (3, 154400023692) $\rightarrow$ $S + 3a_1 + 9a_2 = 154400023692$

s_3 = (7, 973441680328) $\rightarrow$ $S + 7a_1 + 49a_2 = 973441680328$

- Lalu pecahkan sistem persamaan linier:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1945116192326 \\ 1544000023692 \\ 973441680328 \end{pmatrix} (\mathrm{mod} \quad 1234567890133)$$

yang menghasilkan solusi

(S, a_1, a_2) = (190503180520, 482943028839, 1206749628665)

Secret yang dicari adalah 190503180520

- Apa yang terjadi jika 2 orang partisipan mencoba merekonstruksi *S*?
- Tidak mungkin 2 buah titik bisa membentuk polinom derajat 2:

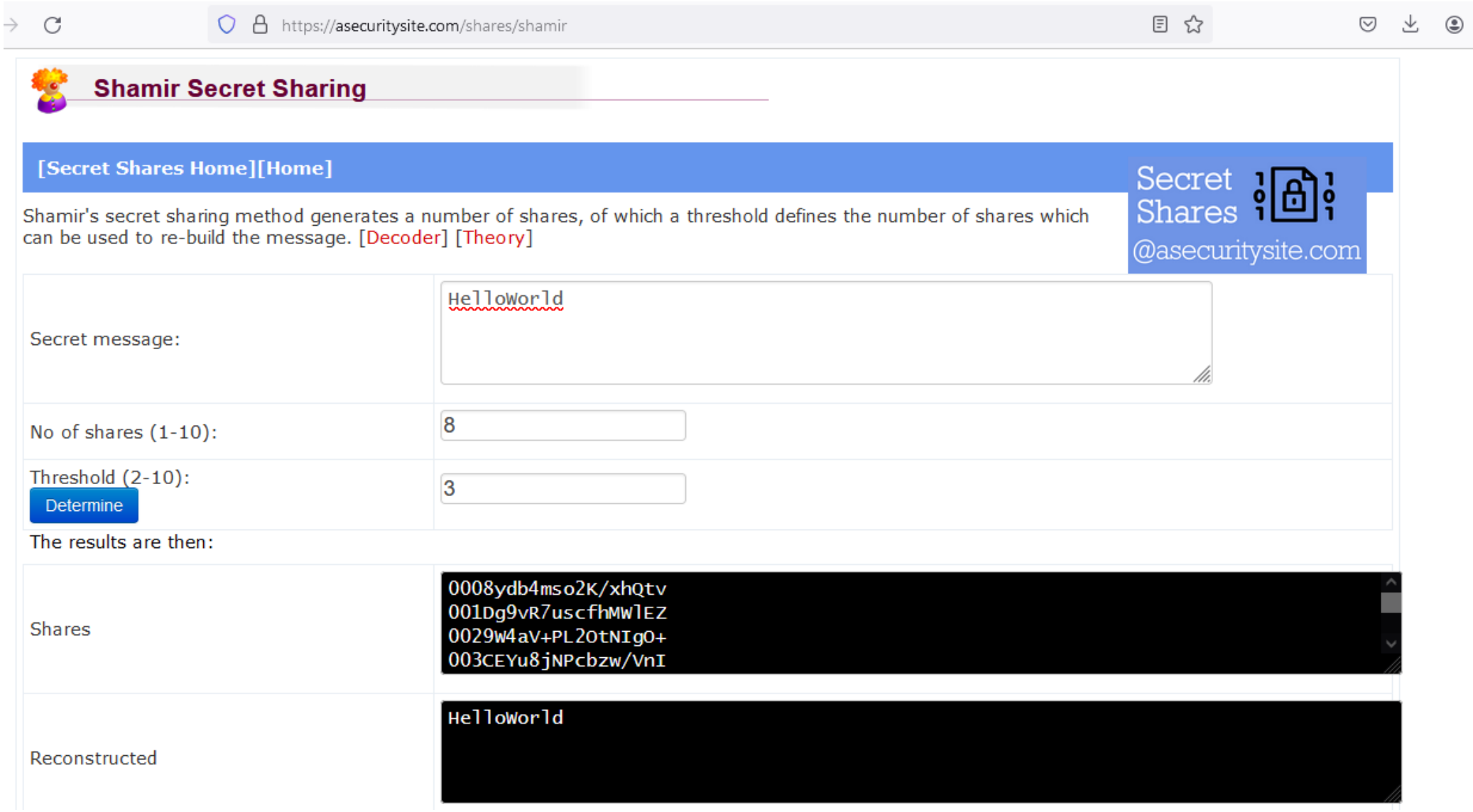
$$f(x) \equiv S + a_1 x + a_2 x^2 \pmod{p}$$

Diperlukan setidaknya 3 buah titik!

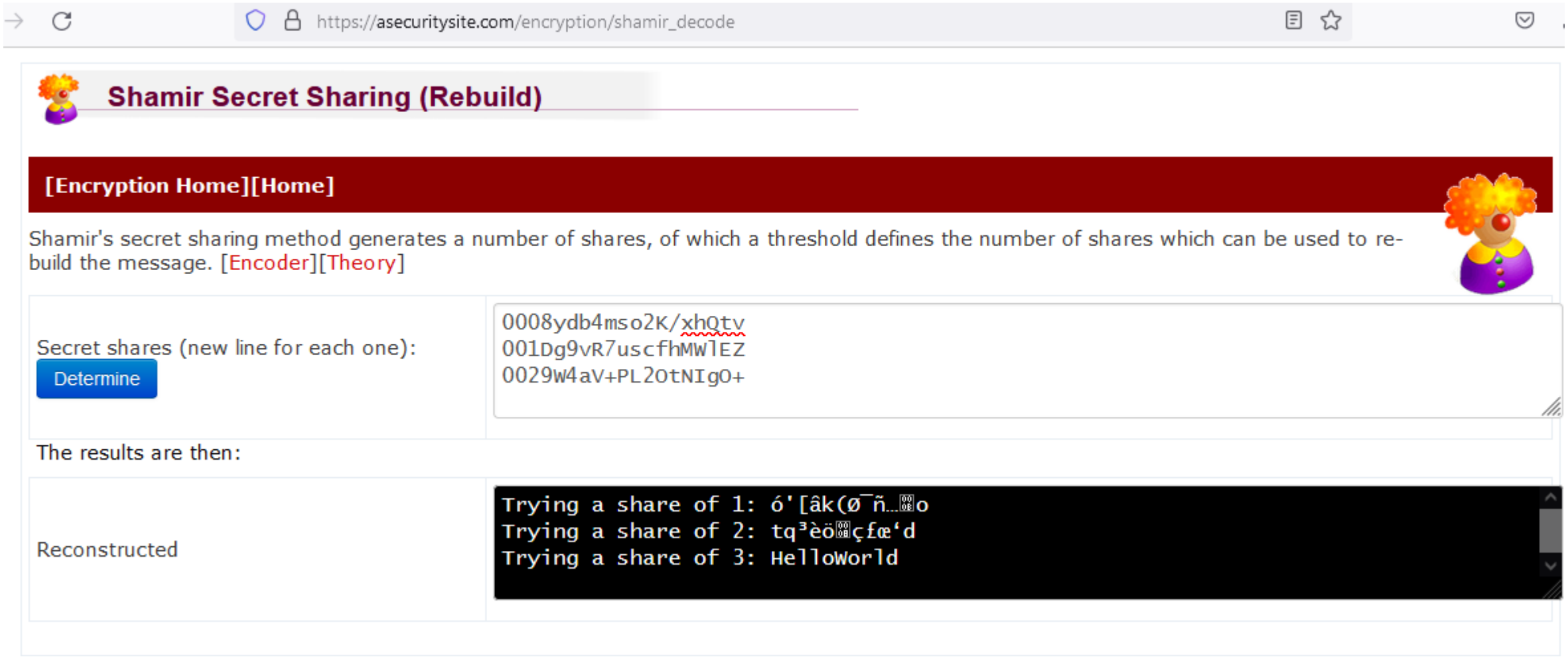
- Misalkan dicoba menggunakan titik ketiga (0, *c*), *c* adalah sembarang *secret*, maka polinom tetap mengandung sebuah nilai yang tidak diketahui (*S*).

- Apa yang terjadi jika > 3 orang partisipan mencoba merekonsruksi *M*?
- SPL tetap bisa diselesaikan!

Demo Shamir secret sharing online: https://asecuritysite.com/shares/shamir



Rekonstruksi secret:



Latihan

- Cobalah membagi password-mu atau PIN-mu ke dalam skema (t, n), dengan t dan n sembarang, misalnya (5, 10), *4, 7), (6, 9), dll.

Referensi

- Trappe, W., Washington, L., *Introduction to Cryptography with Coding Theory*, 2nd edition, Pearson-Prentice Hall, 2006