

# Keterkaitan Probabilitas dengan Algoritma *Divide and Conquer* dalam Kejadian Tanggal Lahir

Aurelia H B Matondang-13510023  
Program Studi Teknik Informatika  
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika  
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia  
13510023@std.stei.itb.ac.id

*Makalah ini berisi pembahasan implementasi dari teori-teori terkait algoritma Divide and Conquer yang telah diajarkan selama semester ganjil tahun ajaran 2012/2013 dalam mata perkuliahan Strategi Algoritma. Pembahasan yang diambil dalam makalah ini adalah Pembahasan dalam masalah ulang tahun. Bagaimana dalam jumlah n orang (yang dipilih secara acak) ada beberapa pasang orang yang memiliki tanggal lahir yang sama. Hal ini dapat dijelaskan dengan beberapa teorema dan ketentuan yang pada akhirnya dapat menjawab (kurang lebih) dari masalah yang dihadapkan lewat makalah ini.*

**Kata Kunci:** Divide and Conquer, birthday problem rantai Markov, Revolving door.

## I. PENDAHULUAN

Istilah “kebetulan” sering kali membuat kita merasa terkejut dan memberikan pemikiran-pemikiran untuk mengkaitkan kejadian tersebut ke dalam hal-hal supernatural dan tidak wajar. Hal ini memang tidak bisa dijelaskan langsung oleh sebuah teorema dalam probabilitas. Namun pada kenyataannya, kejadian ini dapat dijelaskan oleh sebuah cabang pengetahuan dari matematika yang mengkaji kasus kebetulan ini. Kasus tersebut adalah kasus terkait tanggal lahir/ulang tahun.

Dari sekian jumlah penduduk di suatu daerah yang dilahirkan setiap hari dan setiap detik, pasti terdapat beberapa kasus dimana beberapa dari manusia tersebut memiliki waktu (tanggal lahir) yang sama. Kelahiran tersebut dapat didata dan dapat di prediksi berapa persen kemungkinan kejadian tersebut terjadi dalam suatu daerah dengan jumlah penduduk yang dikaji dalam jumlah tertentu.

Perhitungan mengenai bagaimana mengetahui seberapa besar kemungkinan tersebut dapat dicari berdasarkan beberapa teori dan hukum tertentu.

Pada bagian teori dan perhitungan akan terdapat salah satu teori yang dapat menjelaskan dan menyelesaikan masalah tanggal lahir ini. Namun, untuk melihat permasalahan tanggal lahir ini dalam kasus lainnya, pada bagian contoh kasus lainnya dijelaskan penyelesaian kasus ini dalam sebuah rantai yang disebut rantai markov. Rantai markov

ini akan dijelaskan dengan langsung melihat contoh kasus yang telah terjadi di suatu daerah di Amerika dan bagaimana para matematikawan melihat kejadian ini sebagai salah satu misteri matematika yang dapat dipecahkan.

## II. PENJELASAN BIRTHDAY PROBLEM

Dalam birthday problem ini yang akan dibahas adalah kemungkinan beberapa pasang orang bisa memiliki tanggal lahir yang sama. Contohnya dalam 24 orang yang dipilih secara acak, dengan membandingkan tanggal ulang tahun orang pertama dari 24 orang yang dipilih tersebut dengan 23 orang lainnya, orang pertama tersebut memiliki 23 kesempatan untuk menemukan kesamaan dalam tanggal lahir. Sedangkan orang ke dua memiliki kesempatan 22 untuk menemukan kesamaan tanggal ulang tahun dengan lainnya. Secara umum, untuk menemukan beberapa kemungkinan terbentuknya pasangan (tanpa memperdulikan tanggal ulang tahun dan beberapa hal lain yang dapat mempengaruhi perhitungan probabilitas) dapat dilakukan dengan mencari kombinasi dari jumlah orang yang dipilih secara acak dengan jumlah orang yang akan dipasangkan (2 orang).

$${}_{24}C_2 = (24 \cdot 23) / (2) = 276$$

Untuk memilih sebuah tanggal untuk dibandingkan dengan tanggal lahir orang lainnya dalam 24 orang tersebut, terdapat 1/365 kemungkinan yang dimiliki oleh tanggal lahir dari setiap orang tersebut (dengan tidak memperhitungkan tanggal 29 Februari). Perhitungan ini membuat perhitungan kemungkinan adanya tanggal lahir yang sama dari 24 orang tersebut secara statistik tidak ekuivalen.

Beberapa kemungkinan dapat terjadi dalam persoalan tanggal lahir ini. Matematikawan Bloom, Clevenson, dan Watkins menunjukkan bahwa probabilitas dari dua tanggal lahir yang sama dari sebuah grup yang terdiri dari N orang merupakan sebuah minimasi dari sebuah asumsi dari sebuah distribusi regular dari sekumpulan tanggal lahir. Sedangkan menurut matematikawan lainnya dalam tulisannya menjelaskan kejadian ini ke dalam sebuah tipe

pencocokan yang lebih general. Menurut Hocking dan Schwertman dalam sejumlah  $N$  individual terdapat probabilitas terbentuknya  $k$  pasangan dengan rumus:

$$P_{N,k} = \frac{P(\text{exactly } k \text{ pairs out of } N \text{ individuals})}{N!365!} = \frac{N!365!}{(365)^N k! 2^k (N-2k)! (365-N+k)!}$$

Perhitungan ini merupakan bentuk generalisasi dari Hocking dan Schwertman terhadap kasus kesamaan tanggal lahir pada anak kembar, kembar tiga, kembar empat, dan seterusnya

Perhitungan tersebut pada akhirnya akan mengarahkan perhitungan banyaknya pasangan yang mungkin, bukan sebagai jumlah dari orang yang memiliki tanggal lahir yang sama.

### III. PERHITUNGAN DAN TEORI (PROBABILITAS)

#### A. Perhitungan kemungkinan

Untuk kasus dimana dari 24 orang tersebut terdapat paling sedikit 2 orang dengan tanggal lahir yang sama. Untuk mempermudah distribusi dari variasi yang akan terbentuk, abaikan adanya kemungkinan dari 24 orang tersebut ada yang kembar dan kemungkinan ada yang memiliki tanggal ulang tahun 29 Februari. Dengan menganggap semua tanggal memiliki kemungkinan yang sama, maka perhitungan mengenai kemungkinan terdapat 2 orang memiliki tanggal ulang tahun yang sama dan yang tidak memiliki tanggal ulang tahun yang sama dapat dilakukan dengan cara

$$P(A) = 1 - P(A')$$

Dengan;

$P(A)$  = kemungkinan terdapat 2 orang yang memiliki tanggal ulang tahun yang sama

$P(A')$  = kemungkinan tidak terdapat 2 orang yang memiliki tanggal ulang tahun yang sama.

Apabila kemungkinan  $P(A)$  dari 24 orang tersebut sebesar 50% maka jumlah 24 orang tersebut dapat diambil sebagai contoh.

Ketika kejadian merupakan kejadian yang independen, maka kemungkinan seluruh kejadian terjadi sama dengan kemungkinan salah satu dari kejadian-kejadian tersebut terjadi. Sehingga, dalam kasus 24 orang setiap kejadian adalah kejadian dimana masing masing orang dibandingkan tanggal lahirnya (sesuai dengan kasus tertentu) dengan tanggal lahir 23 orang lainnya kemudian dihitung kemungkinannya. Dan pada akhirnya kemungkinan terjadinya seluruh kejadian adalah dengan mengalikan setiap kejadian yang terjadi menyangkut kejadian utama tersebut.

Secara penulisan matematik, perhitungan menjadi :

$$P(A') = P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) \dots P(23)$$

Untuk kasus pertama, dimana sebelumnya tidak ada orang yang dianalisis. Maka untuk orang pertama yang dianalisis mengalami ketidaksamaan tanggal ulang tahun dengan orang sebelumnya memiliki kemungkinan sebesar 100% ( $365/365$ ) (dengan tidak memperdulikan tahun kabisat).

Untuk kasus kedua, dimana orang kedua dibandingkan dengan orang yang dianalisis sebelumnya, yaitu orang pertama, maka kemungkinan orang tersebut untuk tidak memiliki kesamaan tanggal ulang tahun dengan orang sebelumnya adalah ( $364/365$ ). Kemungkinan ini didasarkan apabila orang kedua memiliki tanggal lahir yang berbeda dari 364 hari lainnya selain tanggal kelahiran orang pertama. Untuk kasus berikutnya perhitungan kemungkinan dilakukan dengan cara yang sama.

Sehingga kemungkinan terjadinya ketidaksamaan tanggal lahir pada 24 orang yang dipilih secara acak adalah:

$$P(A') = 365/365 \cdot 364/365 \cdot 363/365 \dots 342/365$$

$$P(A') = 0.4616557421$$

Maka,

$$P(A) = 1 - 0.4616557421 =$$

$$0.5383442579 (53.834426\%)$$

Proses ini dilakukan dengan memandang kemungkinan tersebut kemungkinan dalam sebuah grup dengan  $n$  orang 2 diantaranya memiliki tanggal lahir yang sama

Untuk mempermudah perhitungan, berdasarkan teori pigeonhole:

$$\begin{aligned} \bar{p}(n) &= 1 \times \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \left(1 - \frac{2}{365}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \\ &= \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n} \\ &= \frac{365!}{365^n (365 - n)!} = \frac{n! \cdot \binom{365}{n}}{365^n} \end{aligned}$$

Dengan  $\bar{p}(n)$  adalah kemungkinan tidak terdapat pasangan dengan tanggal ulang tahun yang sama. Dan ketika  $n > 365$   $\bar{p}(n)$  sama dengan 0. Sama seperti cara mengitung kemungkinan sedikitnya 2 orang yang memiliki tanggal ulang tahun yang sama maka kemungkinan tersebut didapatkan dengan cara:

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n).$$



Untuk jumlah kecil N (N=4)

- Terdapat 5 state yang mungkin : tidak ada yang cocok, satu buah pasang, satu buah triplet, satu buah quartet dan 2 buah pasang.
- Terdapat asumsi bahwa setiap orang memiliki probabilitas yang sama untuk meninggalkan perusahaan dan orang baru yang masuk perusahaan, yang merupakan penarikan acak dari populasi dengan distribusi regular dari tanggal ulang tahun.
- Terdapat asumsi bahwa perusahaan akan menerima karyawan baru untuk mengganti karyawan yang telah meninggalkan perusahaan.

Probabilitas ketika seorang karyawan keluar dan seorang karyawan baru masuk adalah  $T_{ij}$ . Ketika  $i =$  tidak cocok dan  $j =$  tidak cocok, maka terdapat 4 cara untuk memilih siapa yang keluar dan 365 cara untuk memilih karyawan baru. Maka penyebut dari pencarian probabilitas  $T_{ij}$  adalah 1460 dan pembilang dari perhitungan probabilitas adalah banyak cara dari seseorang bisa meninggalkan perusahaan dan yang lainnya dapat masuk ke perusahaan, tapi masih tidak memberikan kecocokan dalam tanggal lahir. Dan probabilitas ketika tidak ada kecocokan tanggal lahir dari satu orang yang keluar dari perusahaan dan satu orang yang masuk ke dalam perusahaan adalah 1448/1460. Ketika seluruh kemungkinan didapatkan, kemungkinan tersebut kemudian dituliskan dalam sebuah matriks seperti berikut:

	no match	1 pair	1 triple	1 quad	2 pair
no matches	$\frac{4 \cdot 362}{4 \cdot 365}$	$\frac{2 \cdot 362}{4 \cdot 365}$	0	0	0
1 pair	$\frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 365}$	$\frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 365} + \frac{2 \cdot 364}{4 \cdot 365}$	$\frac{3 \cdot 363}{4 \cdot 365}$	0	$\frac{4 \cdot 363}{4 \cdot 365}$
1 triple	0	$\frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 365}$	$\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 365} + \frac{1 \cdot 364}{4 \cdot 365}$	$\frac{4 \cdot 364}{4 \cdot 365}$	$\frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 365}$
1 quadruple	0	0	$\frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 365}$	$\frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 365}$	0
2 pairs	0	$\frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 365}$	$\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 365}$	0	$\frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 365}$

Pada matriks terdapat sebuah vektor yang menggambarkan probabilitas ketika berada di salah satu state pada waktu  $t$ . Seperti yang disebutkan dalam penjelasan terkait apa yang terjadi dalam suatu waktu  $t$ , vektor waktu berikutnya adalah :

$$s_{t+1} = T s_t.$$

Untuk membuktikan berlakunya teori ini, dilakukan sebuah pengamatan terkait matriks yang ada dalam waktu tertentu dan kejadian tertentu (ketika seorang karyawan keluar dan seorang karyawan baru masuk). Dalam pengamatannya terdapat sejumlah definisi dari rantai Markov yang dapat digunakan untuk menyimpulkan probabilitas yang terjadi.:

Definisi 1 : Sebuah rantai Markov akan menjadi ketika setiap state terjadi kembali (recurrent). Hal ini kemudian akan mengembalikan proses ke dalam state yang diketahui dengan probabilitas sama dengan 1.

Definisi 2 : Sebuah rantai Markov dikatakan regular jika terdapat sebuah integer positif  $l$  dan  $T^l$  hanya mengandung elemen positif saja.

Definisi 3 : Sebuah distribusi invariant  $s$ , adalah sebuah vektor yang memenuhi

$$s = T s.$$

Sebuah distribusi invariant sering kali dikaitkan sebagai distribusi dari state yang tetap.

Untuk  $N=4$ , perhitungan sederhana yang menyimpulkan bahwa terdapat 3 cara untuk bergerak dari sebuah state peluang yang satu ke state peluang lainnya. "+" merupakan symbol yang menunjukkan elemen yang bernilai lebih besar dari nol.

$$\begin{bmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & 0 & + \\ 0 & + & + & + & + \\ 0 & 0 & + & + & 0 \\ 0 & + & + & 0 & + \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + \end{bmatrix}$$

Dan eigenvector yang menggambarkan permasalahan ini adalah

$$s = \begin{bmatrix} \frac{47831784}{48627125} \\ \frac{792792}{48627125} \\ \frac{1456}{48627125} \\ \frac{1}{48627125} \\ \frac{1092}{48627125} \end{bmatrix}.$$

Probabilitas ini sama dengan probabilitas yang dihasilkan oleh percobaan terpisah, memilih 4 orang dari sebuah populasi yang memiliki distribusi tanggal lahir yang regular.

Rumus dari Hocking dan Schwertman untuk  $k_3$  tiga pasang dan  $k_2$  pasang dari  $N$  menghasilkan elemen ketiga dari vektor

$$P_{k_3, k_2} = \left[ \frac{N!}{(3!)^{k_2} (2!)^{k_3} (365)^N} \right] \left[ \frac{365!}{k_3! k_2! (N - 3k_3 - 2k_2)! (365 - n + 2k_3 + k_2)!} \right]$$

$$P_{1,0} = \left[ \frac{4!}{(3!)(365)^4} \right] \left[ \frac{365!}{(365 - 4 + 2)!} \right] = \frac{1456}{48627125}.$$

Probabilitas yang keempat adalah probabilitas dimana semua orang memiliki ulang tahun yang sama, yaitu

$$\frac{365}{365^4} = \frac{1}{48627125}.$$

Pada kenyataannya, ketika dikaitkan dengan asumsi yang dilakukan di awal terdapat ketidakcocokan asumsi. Terdapat kejadian-kejadian yang menyebabkan

munculnya peningkatan jumlah pasangan dengan tanggal lahir yang sama dikarenakan terdapat siklus penerimaan dan pemecatan karyawan secara drastis. Hal ini menyebabkan terdapat kecurigaan dari penulis artikel pada surat kabar terkait kejadian ini.

## V. PENEMUAN TANGGAL LAHIR DENGAN SISTEM PATTERN MATCHING

Dari keseluruhan bagian yang ada pada makalah ini lebih menjelaskan bagaimana persoalan ini dibahas dalam lingkup probabilitas dan terkadang hasil yang diharapkan tidak sesuai dengan kejadian yang sebenarnya.

Penjelasan terkait persoalan *birthday problem* ini lebih diarahkan ke beberapa kemungkinan terjadinya kesamaan tanggal lahir dari sekumpulan tanggal lahir yang terdapat dalam suatu populasi. Sedangkan bagaimana hasil angka untuk menentukan kecocokan dari tanggal lahir tersebut akan dibahas pada bagian ini.

Bagian ini menjelaskan bagaimana menemukan sebuah kecocokan antar beberapa tanggal lahir dari sejumlah orang dalam populasi dalam jumlah yang cukup besar (pada bagian ini dengan menggunakan kasus dari bagian sebelumnya). Dengan mengikuti langkah pengerjaan umum dengan algoritma divide and conquer, dan mengaitkannya dengan teori probabilitas untuk penyelesaian persoalan ini, maka jumlah kesamaan tersebut dapat dicari dengan tahap-tahap sebagai berikut:

Kesamaan yang terjadi dalam kasus ini didasarkan apakah terdapat seorang karyawan yang memiliki saudara kembar (*double, triple, quadruple*).

Pencocokan dilakukan untuk mencari matriks yang menandakan situasi yang terjadi ketika seorang karyawan meninggalkan perusahaan ( $N$  ke  $N-1$ ). Situasi ini kemudian akan menghasilkan matriks yang menggambarkan situasi tersebut dengan situasi dimana karyawan baru masuk ke dalam perusahaan tersebut.

Untuk membentuk matriks tersebut maka dilakukan kalkulasi set yang masing-masing akan merepresentasikan matriks-matriks tersebut (A dan B).

Untuk mendapatkan T1 (merepresentasikan situasi dimana seorang karyawan meninggalkan perusahaan). Pada set A, disetiap elemen yang terdapat didalamnya dilakukan:

1. Hitung banyaknya elemen a yang ada di dalam A
2. Untuk sebuah tanggal lahir, j, lakukan pengurangan jumlah orang dengan tanggal lahir tersebut dengan 1.
3. Hasilnya merupakan partisi dari  $N-1$  (elemen b untuk set B)
4. Simpan probabilitas (jumlah orang dengan tanggal lahir  $j/N$ ) dari transisi dari a ke b
5. Ulangi langkah ke dua sampai ke 4 untuk semua tanggal lahir yang dicari kecocokannya.

Untuk mendapatkan T1 (merepresentasikan situasi dimana seorang karyawan baru memasuki perusahaan). Pada set B, disetiap elemen yang terdapat didalamnya dilakukan:

1. Hitung banyaknya elemen dari b
2. Untuk setiap tanggal lahir yang dicari, jumlah dari banyaknya orang yang memiliki tanggal lahir tersebut ditambah sejumlah 1
3. Hasilnya merupakan partisi dari N
4. Ulangi langkah ke 2 sampai ke 4 untuk semua tanggal ulang tahun yang akan dicari
5. Buat e menjadi partisi yang dibentuk dengan menambahkan seseorang yang tanggal lahirnya tidak dimiliki oleh orang lain dalam grup tersebut.
6. Simpan hasil probabilitas  $((365-(\text{banyaknya elemen b}))/365)$  dari transisi b ke e

Untuk efisiensi, bentuk T1 dan T2 dengan metode penyimpanan matriks sparse. Untuk mendapatkan T, lakukan pengulangan proses sampai ditemukan toleransi yang sesuai. Proses mendapatkan T dilakukan dengan melakukan operasi perkalian silang (*cross*) antara kedua matriks yang dibentuk tersebut.

## KESIMPULAN

Persoalan tanggal lahir ini merupakan salah satu persoalan yang dapat diselesaikan dengan berbagai cara. Penyelesaian dengan menggunakan definisi umum dari algoritma divide and conquer dapat menjadi solusi untuk mendapatkan jumlah yang pasti dari situasi yang terjadi untuk mendapatkan sebuah kesamaan. Namun, untuk kasus ini, untuk jumlah N yang semakin besar, waktu proses dari algoritma ini akan semakin lama karena proses iterasi yang semakin banyak juga, sehingga pengoperasian terkadang dilakukan di masing-masing matriks saja

## REFERENSI

- [1] Coincidences : The Truth is Out There  
<http://www.rsscse-edu.org.uk/tsj/wp-content/uploads/2011/03/matthews.pdf>  
Waktu akses : 17 Desember 2012; pukul 9.18 WIB
- [2] A Revolving Door Birthday Problem  
<http://williampolley.com/webpapers/birthday.pdf>  
Waktu akses : 17 Desember 2012; pukul 9.20 WIB
- [3] Birthday Problem- Salem Press  
<http://salempress.com/store/pdfs/birthday.pdf>  
Waktu akses : 17 Desember 2012; pukul 9.20 WIB

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 17 Desember 2012

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Aurelia', with a long horizontal stroke extending to the right.

Aurelia H B Matondang-13510023