Solusi Sistem Persamaan Lanjar Homogen dengan Eliminasi Gauss-Jordan

Sandy Socrates 13508044[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*if18044@students.if.itb.ac.id*

***Abstract*—Sistem persamaan lanjar sering digunakan untuk memodelkan permasalahan yang ditemukan pada berbagai macam pelajaran dan mata kuliah. Contoh penggunaannya misalkan pada permasalahan rangkaian listrik, dan optimasi permasalahan ekonomi. Penyelesaian sistem persamaan lanjar secara analitik dapat dilakukan dengan eliminasi, substitusi, dan pembagian determinan. Sedangkan penyelesaian dengan metode numerik dapat dilakukan misalnya dengan eliminasi Gauss-Jordan. Makalah ini akan membahas penggunaan metode eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan sistem persamaan lanjar homogen. Sistem persamaan lanjar homogen adalah sistem persamaan lanjar dengan matriks *b* = 0. Solusi sistem persamaan lanjar homogen berupa sebuah himpunan nilai sehingga dibutuhkan penyesuaian pada metode eliminasi Gauss-Jordan untuk bisa mendapatkan hasil yang sesuai.**

***Index Terms*— eliminasi Gauss-Jordan, metode numerik, sistem persamaan lanjar, sistem persamaan lanjar homogen.**

I. PENDAHULUAN

Sistem persamaan lanjar digunakan untuk memodelkan permasalahan dari berbagai bidang seperti ekonomi, fisika dan akuntansi. Sejak pendidikan menengah pertama, metode analitik untuk mendapatkan solusi sistem persamaan lanjar telah diberikan. Metode analitik tersebut antara lain:

1. eliminasi,
2. substitusi,
3. pembagian determinan matriks.

Dalam prakteknya, tidak jarang ditemukan sistem persamaan lanjar yang memiliki banyak solusi. Salah satu variasi dari sistem persamaan lanjar dengan vektor $b = 0$ disebut sistem persamaan lanjar homogen. Jika determinan matriks $A \neq 0$ solusinya adalah sebuah vektor x = 0. Namun jika determinan matriks $A = 0$ maka solusi sistem persamaan lanjar ini adalah sebuah himpunan.

Penyelesaian sistem persamaan lanjar homogen dengan determinan matriks $A = 0$ menggunakan metode analitik dapat diselesaikan dengan mengenalkan sebuah parameter sebagai nilai variabel yang hilang. Namun penyesuaian perlu dilakukan untuk melakukan pencarian solusi sistem persamaan lanjar homogen dengan metode numerik.

Pada makalah ini akan dijelaskan penyesuaian yang diperlukan untuk mencari solusi sistem persamaan lanjar homogen dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan. Dipilih metode eliminasi Gauss-Jordan karena metode ini memudahkan penjelasan penyesuaian untuk sistem persamaan lanjar homogen.

II. SISTEM PERSAMAAN LANJAR

Sistem persamaan lanjar adalah sebuah model matematika dari sebuah sistem yang dibangun dengan fungsi lanjar. Fungsi lanjar *f* didefinisikan pada (1) dan (2) untuk setiap vektor *a* dan *b* serta konstanta *k*

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \tag{1}$$

$$f(k\,.\,\vec{a}) = k.f(\vec{a}) \tag{2}$$

Pada [1] bentuk umum sistem persamaan lanjar dinyatakan dalam (3).

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{3}$$

Persamaan (3) dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks (4).

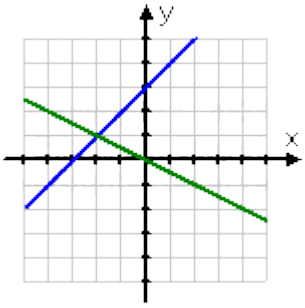
$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

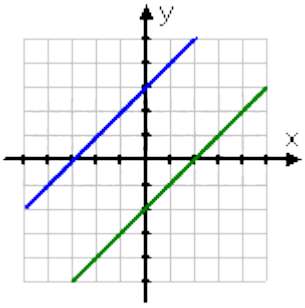
Terdapat tiga kemungkinan solusi sistem persamaan lanjar, yaitu:

1. mempunyai solusi yang unik,
2. mempunyai banyak solusi,
3. tidak ada solusi.

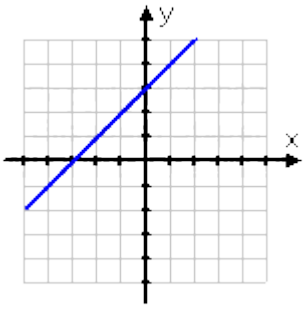
Kemungkinan solusi ini diberikan pada Gambar 1, Gambar 2, dan Gambar 3. [2]



Gambar 1. Sistem persamaan lanjar dengan satu solusi



Gambar 2. Sistem persamaan lanjar tanpa solusi



Gambar 3. Sistem persamaan lanjar dengan banyak solusi

III. Eliminasi Gauss-Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan merupakan salah satu metode numerik untuk mencari solusi sistem persamaan linear. Metode ini merupakan variasi dari eliminasi Gauss. Bedanya, matriks *A* diubah menjadi matriks identitas sehingga solusi bisa langsung didapatkan dari hasil eliminasi. Hal ini bisa dilihat pada (5).

$$Ax = b \rightarrow Ix = b'$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_n' \end{bmatrix} \quad (5)$$

Setelah menjalankan eliminasi Gauss-Jordan, solusi sistem persamaan lanjar diberikan oleh *b'*. Langkah – lanhgah metode eleminasi Gauss-Jordan dapat dilihat pada *pseudocode* di bawah ini yang merujuk pada [1].

Pseudocode eliminasi gauss jordan tanpa pivot

```
PROCEDURE eliminasi_gauss_jordan(input A: matriks;
                    input b: vektor; input n:integer;
                    output x: vektor)
KAMUS
   i,k,j : integer;
   m, tampung: real;
ALGORITMA
   for k = i to n
      tampung <- a[k][k]
      for j = i to n
         a[k][[j] <- a[k][j] / tampung
      b[k] <- b[k] / tampung
      for i = 1 to n
         if i <> k
            m <- a[i][j]
            for j = 1 to n
               a[i][j] <- a[i][j] - m*a[k][j]
            b[i] <- b[i] - m*b[k]
   for i = 1 to n
      x[i] <- b[i]
```

IV. Sistem Persamaan Lanjar Homogen

Sistem persamaan lanjar homogen merupakan salah satu bentuk sistem persamaan lanjar dengan solusi banyak. Sistem persamaan lanjar homogen adalah sistem persamaan lanjar dengan matriks hasil $b = 0$. Bentuk umum sistem persamaan lanjar homogen dapat dilihat pada (6) dan (7).

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Selanjutnya dibahas bagaimana mencari nilai *x* dengan memperhatikan sistem persamaan lanjar homogen berikut

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 0 \\ 0.5\,x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Determinan matriks *A* pada (8) dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} Det(A) &= 1 * 1 - 2 * 0.5 \\ Det(A) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Jika dilakukan eliminasi terhadap (8) maka didapat

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad (10)$$

Dengan determinan matriks *A* pada (8) bernilai 0 maka secara teori nilai *x* ada banyak (tak hingga). Namun setelah dilakukan eliminasi pada (10) tidak dapat dilakukan operasi lebih lanjut. Maka untuk dapat mencari *x* dikenalkan sebuah parameter, misalkan *k*, $k \in$ R, untuk mengisi nilai x_2.

$$x_2 = k, \qquad k \in \mathrm{R} \quad (11)$$

Substitusi (11) ke (8)

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 0\\ x_1 + 2k &= 0\\ x_1 &= -2k \end{aligned} \quad (12)$$

Hasil yang didapatkan sesuai (12) adalah sebagai berikut

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2k\\ k\end{bmatrix}, k \in \mathrm{R} \quad (13)$$

Persamaan (13) adalah sebuah himpunan semua pasangan nilai yang memenuhi sistem persamaan lanjar homogen (8).

Untuk contoh berikutnya digunakan sistem persamaan lanjar homogen dengan determinan matriks $A \neq 0$ seperti berikut

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 0\\ 0.5\,x_1 + 0.5\,x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Det(A) &= 1 * 0.5 - 2 * 0.5\\ Det(A) &= -0.5 \end{aligned} \quad (15)$$

Karena determinan ≠ 0, maka lakukan eliminasi.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
$$x_1 = 0 \quad (16)$$

Setelah didapat (16), substitusikan dengan (14)

$$x_2 = 0 \quad (17)$$

Didapatkan

$$x=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad (18)$$

Untuk determinan matriks $A \neq 0$ didapatkan hasil seperti (18).

Jika dilihat sekilas, solusi (6) adalah $x = 0$. Solusi ini benar, tapi ini merupakan solusi trivial karena solusi dari sistem persamaan lanjar homogen merupakan sebuah himpunan. Jika nilai determinan matriks $A \neq 0$ maka $x = 0$ merupakan satu-satunya solusi. Jika determinan matriks $A = 0$, solusi sistem persamaan lanjar ada banyak.

V. Eliminasi Gauss-Jordan Pada Sistem Persamaan Lanjar Homogen

Dari contoh persamaan (8) dapat dilihat bahwa metode eliminasi (10) akan memeberikan hasil bilangan INF karena terdapat pembagian dengan 0. Eliminasi Gauss-Jordan yang menggunakan eliminasi sebagai dasarnya akan memberikan hasil INF pula.

Untuk mengatasi hasil ini, dikenalkan parameter pada seperti pada (11). Jika (11) ditampilkan dalam bentuk perkalian matriks maka bentuknya adalah sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ k\end{bmatrix}, k \in \mathrm{R} \quad (19)$$

Jika eliminasi Gaus-Jordan dilanjutkan maka akan didapatkan hasil berikut

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2k\\ k\end{bmatrix}, k \in \mathrm{R} \quad (20)$$

Jika ditelusuri ternyata nilai *k* dapat dikeluarkan dari vektor *b.* Sehingga akan didapat persamaan baru seperti berikut

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}= k\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, k \in \mathrm{R}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}= k\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}, k \in \mathrm{R} \quad (21)$$

Sehingga untuk sistem persamaan lanjar homogen dengan determinan matriks *A = 0* dilakukan penyesuaian terlebih dahulu terhadap *A* sebelum dilakukan eliminasi Gauss-Jordan lebih lanjut. Serta untuk menambah kecepatan penghitungan jika determinan matriks $A \neq 0$ pada sistem persamaan lanjar homogen langsung dikembalikan vektor $x = 0$.

Pseudocode eliminasi gauss jordan dengan perbaikan untuk mengatasi sistem persamaan lanjar homogen

```
PROCEDURE eliminasi_gauss_jordan_homogen(input A:
          matriks; input b: vektor; input n:integer;
          output x: vektor)
KAMUS
   i : integer
ALGORITMA
   if (homogen(A,n) AND determinan(A,n) <> 0)
      x <- zeros(n)
```

```
 else
   if (determinan (A,n) = 0)
      for i = 1 to n-1
         A[n][i] = 0
      A[n][n] = 1
      b[n] = 1
   eliminasi_gauss_jordan(A,b,n,x)
   if (homogen(A,n)
      print("x * k")
```

Implementasi penyesuaian eliminasi Gauss-Jordan untuk mengatasi sistem persamaan lanjar homogen pada kakas Matlab.

```
function [x,flag,outstr] =
eliminasi_gauss_jordan_homogen(A,b,n)
    flag = 0;
    x(1:n,1) = -9999;
    outstr = 'Matrik singular';
    homogen = false;
    if b(1:n) == 0
        homogen = true;
    end
    if homogen & det(A) ~= 0
        x(1:n,1) = 0;
        flag = 1;
        outstr = 'Solusi satu';
    else
        if  homogen
            for i=1:n-1
                A(n,i) = 0;
            end
            A(n,n) = 1;
            b(n) = 1;
        end
        pivot = zeros(1,n);
        for k=1:n
            pivot(k)=k;
            max = abs(A(k,k));
            for j=k+1:n
                if max < abs(A(j,k))
                    max = abs(A(j,k));
                    pivot(k) = j;
                end
            end

            if pivot(k)~=k
                for j=1:n
                    max = A(k,j);
                    A(k,j) = A(pivot(k),j);
                    A(pivot(k),j) = max;
                end
            end

            if A(k,k) == 0.0
                return;
            end
        end
        flag = 1;
        outstr = 'Matriks tidak singular';

        for k=1:n
            if pivot(k) ~= k
                dum = b(k);
                b(k) = b(pivot(k));
                b(pivot(k)) = dum;
            end
        end

        for k=1:n
            tampung = A(k,k);
            for j=1:n
                A(k,j)=A(k,j)/tampung;
            end
            b(k)=b(k)/tampung;
            for i=1:n
                if(i~=k)
                    m=A(i,k);
                    for j=1:n
                        A(i,j)=A(i,j)-m*A(k,j);
                    end
                    b(i)=b(i)-m*b(k);
                end
            end
        end
        for i=1:n
            x(i)=b(i);
        end
    end
end
```

Hasil pengujian penyesuaian Gauss-Jordan terhadap beberapa kasus uji.

Kasus sistem persamaan lanjar biasa

```
A =

    3.0000   -0.1000   -0.2000
    0.1000    7.0000   -0.3000
    0.3000   -0.2000   10.0000

b =

    7.8500
  -19.3000
  71.4000

eliminasi_gauss_jordan_homogen(A,b,3)

ans =

    3.0000
   -2.5000
   7.0000
```

Kasus sistem persamaan lanjar homogen determinan 0

```
A =

    1    1   -2
    3    2    4
    4    3    2

b =

    0
    0
    0

>> eliminasi_gauss_jordan_homogen(A,b,3)

ans =
```

```
   -8.0000
   10.0000
    1.0000
```

Kasus sistem persamaan lanjar homogen determinan ≠ 0

```
B =

    1    1
    0.5  1


b2 =

    0
    0

>> eliminasi_gauss_jordan_homogen(B,b2,2)

ans =

    0
    0
```

Hasil yang didapat tepat, namun perlu diingat bahwa hasil merupakan konstanta untuk parameter untuk (A,b,3).

Contoh soal terapan dari [3]

Example 5. Balance the propane-oxygen equation by solve the homogeneous linear system

$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Untuk soal di atas ubah terlebih dahulu menjadi

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Kasus soal terapan

```
B =

    3    0   -1    0
    8    0    0   -2
    0    2   -2   -1
    0    0    0    0


b2 =

    0
    0
    0
    0

>> eliminasi_gauss_jordan_homogen(B,b2,4)

ans =

    0.2500
    1.2500
    0.7500
    1.0000
```

VI. KESIMPULAN

Sistem persamaan lanjar homogen adalah salah satu bentuk sistem persamaan lanjar yang unik. Sistem persamaan lanjar ini memiliki hasil yang berupa himpunan pasangan nilai.

Besar himpunan solusi sistem persamaan lanjar homogen tergantung pada determinan matriks *A*. Jika determinan $A \neq 0$, maka solusi hanya ada satu yaitu $x = 0$. Jika determinan $A = 0$ maka besar himpunan solusi sistem persamaan lanjar mencapai hingga.

Eliminasi Gauss-Jordan dapat disesuaikan untuk menyelesaikan sistem persamaan lanjar homogen. Hasil yang didapatkan harus dikalikan sebuah parameter Real untuk mendapatkan himpunan solusi yang memenuhi.

VII. ACKNOWLEDGMENT

Penulis menyampaikan terimakasih kepada Bapak Rinaldi selaku dosen Metode Numerik dan Logika Fuzzy. Atas bimbingan beliau, penulis mendapatkan ilmu-ilmu baru yang sangat bermanfaat. Penulis juga menyempaikan terimakasih kepada keluarga, Ana, dan teman-teman GCD atas dukungan selama pengerjaan makalah ini. Dan terimakasih kepada Danang dan Dimas yang telah memberikan pengalaman kerja sama yang menyenangkan selama mengambil mata kuliah Metode Numerik dan Logika Fuzzy.

REFERENCES

[1] Munir, Rinaldi, "Metode Numerik untuk Teknik Informatika", Edisi kedua (revisi), Bandung : Penerbit Informatika, 1998, pp 95, 104-105.

[2] Stapel, Elizabeth. "Systems of Linear Equations: Definitions." Purplemath. Tersedia di http://www.purplemath.com/modules/systlin1.htm. Diakses 15 Mei 2012

[3] Mathews , John H."Module for Homogeneous Linear Systems" Tersedia di http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/HomogenLinSystemMod.html Diakses 15 Mei 2012

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Mei 2012

Sandy Socrates
13508044