

Aplikasi Pewarnaan Graf pada Penjadwalan Pertandingan Olahraga Sistem Setengah Kompetisi

Ryan Yonata (13513074)
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
ryan.yonata@students.itb.ac.id

Abstrak — Penjadwalan yang efektif pada suatu kompetisi olahraga merupakan hal yang penting. Semakin efektif suatu jadwal pertandingan berarti semakin sedikit waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan sebuah kompetisi. Pada pertandingan olahraga sistem setengah kompetisi, penjadwalan yang efektif dapat dilakukan dengan menerapkan pewarnaan graf. Pewarnaan graf dapat menghasilkan jumlah hari minimum untuk melaksanakan kompetisi menyesuaikan dengan jumlah lapangan yang tersedia. Aplikasi pewarnaan graf yang digunakan adalah pewarnaan sisi, dimana simpul menyatakan tim yang bertanding dan sisi menyatakan pertandingan yang terjadi.

Kata kunci — Pewarnaan Graf, penjadwalan, sisi, pertandingan.

I. PENDAHULUAN

Olahraga merupakan serangkaian gerak raga yang teratur dan terencana yang dilakukan orang untuk mencapai suatu maksud atau tujuan tertentu. Secara umum ada 4 tujuan olahraga, yaitu untuk prestasi, rekreasi, kesehatan, dan pendidikan[3]. Tujuan olahraga untuk prestasi dapat dicapai dengan mengikuti kompetisi olahraga.

Kompetisi olahraga dapat dilakukan secara perorangan maupun kelompok. Suatu kompetisi olahraga biasanya memiliki sistem pertandingannya sendiri. Sistem pertandingan olahraga dibedakan menjadi dua macam, yaitu sistem gugur dan sistem kompetisi. Beberapa cabang olahraga yang banyak digemari di dunia seperti sepak bola dan bola basket biasanya menggunakan kedua jenis sistem pertandingan tersebut, bahkan mencampur kedua jenis sistem pertandingan tersebut (disebut sistem pertandingan campuran).

Sistem pertandingan kompetisi dibedakan menjadi dua, yaitu sistem kompetisi penuh (*double round-robin*) yang menerapkan sistem kandang-tandang, dan sistem setengah kompetisi (*round-robin*). Sistem pertandingan kompetisi biasanya berlangsung lebih lama dibandingkan dengan sistem gugur karena harus mempertemukan seluruh tim yang terlibat satu sama lain. Oleh karena itu, penjadwalan haruslah efektif. Penjadwalan yang efektif akan mempersingkat waktu berlangsungnya kompetisi.

Permasalahan penjadwalan pada sistem pertandingan setengah kompetisi dapat diselesaikan dengan aplikasi pewarnaan graf yaitu pewarnaan sisi.

II. DASAR TEORI

A. Graf

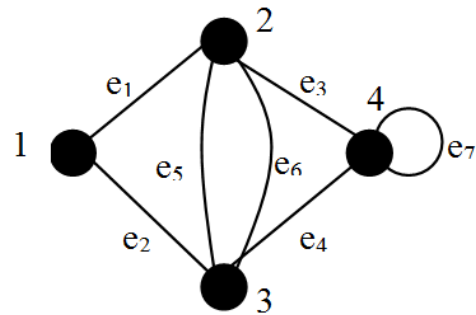
Graf adalah struktur diskrit yang terdiri dari simpul (*vertices*) dan sisi (*edges*) yang menghubungkan simpul-simpul tersebut[2]. Graf didefinisikan sebagai berikut.

Graf G dinyatakan dengan notasi $G(V,E)$ dan merupakan pasangan himpunan yang terdiri dari:

V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices*)

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan simpul-simpul

Berikut merupakan contoh graf.



Gambar 1. Graf G_1

Graf G_1 tersebut terdiri dari:

$V = \{1,2,3,4\}$

$E = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(2,3),(3,2),(4,4)\}$

$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

Sisi e_5 dan e_6 disebut sisi ganda (*multiple edges* atau *parallel edges*) karena kedua sisi ini menghubungkan 2 buah simpul yang sama, yaitu simpul 2 dan simpul 3. Sementara sisi e_7 disebut sisi gelang atau kalang karena berawal dan berakhir pada simpul yang sama, yaitu simpul 4.

Graf dapat dibedakan menjadi beberapa jenis berdasarkan aspek-aspek tertentu. Berdasarkan ada atau tidaknya sisi gelang ataupun sisi ganda, graf dibedakan

menjadi 2 jenis, yaitu:

1. Graf sederhana (simple graph), yaitu graf yang tidak memiliki sisi gelang atau sisi ganda.
2. Graf tak-sederhana (unsimple graph), yaitu graf yang memiliki sisi gelang ataupun sisi ganda. Graf yang memiliki sisi gelang dinamakan graf semu, sedangkan yang memiliki sisi ganda dinamakan graf ganda.

Sedangkan berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf dibedakan menjadi 2 jenis, yaitu:

1. Graf tak berarah (undirected graph), yaitu graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.
2. Graf berarah (directed graph) yaitu graf yang sisinya memiliki orientasi arah.

Jenis	Sisi	Sisi ganda	Sisi gelang
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

[1] Tabel 1. Tabel jenis graf

Berikut merupakan beberapa terminologi graf:

1. Ketetanggaan (Adjacent)
Simpul a dan simpul b dikatakan bertetangga jika kedua simpul tersebut terhubung langsung (dihubungkan dengan sebuah sisi).
2. Bersisian (Incidency)
Sebuah sisi $e = (v_1, v_2)$ dikatakan bersisian dengan simpul yang membentuknya. Hal ini berarti e bersisian dengan v_1 dan v_2 .
3. Simpul Terpencil (Isolated Vertex)
Simpul terpencil adalah simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya. Dengan kata lain, simpul terpencil tidak terhubung ke simpul lain.
4. Graf Kosong (null graph atau empty graph)
Graf kosong merupakan graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.
5. Derajat (Degree)
Derajat suatu simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.
6. Lintasan (Path)
Lintasan ialah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi dalam graf. Panjang lintasan merupakan jumlah sisi dalam lintasan tersebut.
7. Sikulus (Cycle) atau Sirkuit (Circuit)
Sirkuit atau siklus merupakan lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Panjang sirkuit adalah jumlah sisi dalam sirkuit tersebut.
8. Terhubung (Connected)
Dua buah simpul disebut terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Graf G disebut graf terhubung (connected graph) jika untuk setiap pasang simpul v_1 dan v_2 dalam himpunan V terdapat lintasan dari v_1 ke v_2 . Jika tidak, disebut

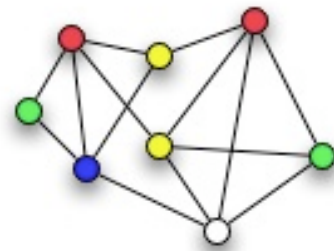
graf tak terhubung.

9. Upagraf (Subgraph) dan Komplemen Upagraf
 $G_1 = (V_1, E_1)$ disebut sebagai upagraf dari graf $G(V, E)$ jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Komplemen dari upagraf tersebut adalah upagraf yang sisi dan simpulnya bukan merupakan komponen upagraf tersebut. Kompoknen graf adalah jumlah maksimum upagraf terhubung dalam graf G.
10. Upagraf Rentang (Spanning Subgraph)
Upagraf rentang adalah upagraf yang mengandung semua simpul dari G.
11. Cut-Set
Cut-set dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan graf G tidak terhubung, dan menghasilkan dua komponen.
12. Graf Berbobot (Weighted Graph)
Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).
13. Graf Lengkap
Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya memiliki sisi ke semua simpul lainnya.

B. Pewarnaan Graf

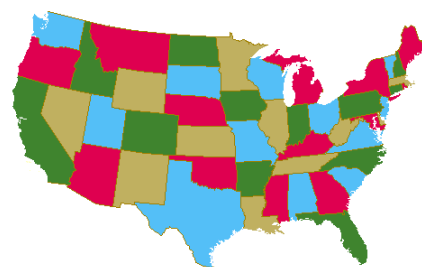
Pewarnaan Graf terdiri dari 2 jenis, yaitu:

1. Pewarnaan Simpul
Pewarnaan simpul dilakukan dengan cara memberi warna pada simpul-simpul graf sedemikian sehingga dua simpul bertetangga mempunyai warna berbeda.



[1]Gambar 2. Pewarnaan Simpul

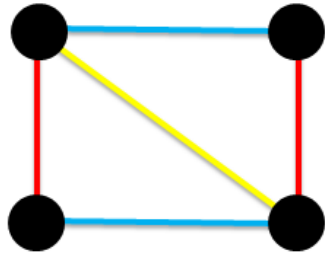
Pewarnaan simpul dapat diaplikasikan dalam pewarnaan pada peta sehingga 2 wilayah yang bersebelahan tidak memiliki warna yang sama.



[1]Gambar 3. Pewarnaan wilayah pada peta

2. Pewarnaan Sisi

Pewarnaan sisi dilakukan dengan cara mewarnai setiap sisi sedemikian sehingga sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Banyaknya warna minimal yang dapat digunakan untuk mewarnai sisi-sisi dalam suatu graf disebut bilangan kromatik sisi G , yang dinotasikan $\chi'(G)$.



Gambar 4. Pewarnaan sisi pada graf

Teorema Vizing untuk pewarnaan sisi pada graf:
Jika G merupakan graf sederhana teratur, maka berlaku
 $\chi'(G) = \Delta(G)$ atau $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$
dengan Δ adalah derajat simpul graf teratur.

Teorema pewarnaan sisi graf lengkap:

Untuk setiap graf lengkap K_n berlaku

$\chi'(K_n) = n - 1$ jika n genap dan $\chi'(K_n) = n$ jika n ganjil
Algoritma pewarnaan sisi graf lengkap untuk n ganjil:

- Berilah warna pada sisi-sisi luar yang membentuk segi- n dengan warna berbeda untuk setiap sisinya.
- Sisi-sisi yang tersisa diberi warna yang sama dengan sisi luar jika sisi tersebut sejajar dengan salah satu sisi luar.

Algoritma pewarnaan sisi graf lengkap untuk n genap:

- Hapus salah satu simpul sehingga graf menjadi graf lengkap dengan n ganjil.
- Lakukan langkah pewarnaan sisi pada graf lengkap dengan n ganjil hingga tuntas.
- Tambahkan kembali simpul yang dihapus dan hubungkan simpul tersebut dengan sisi berwarna ke simpul yang belum bersisian dengan simpul dengan warna tersebut.

Pewarnaan sisi pada graf bukan semata-mata hanya untuk menandai sisi graf, tetapi juga bertujuan untuk mendapatkan warna seminimal mungkin untuk pewarnaannya.

C. Sistem Pertandingan Setengah Kompetisi

Sistem pertandingan setengah kompetisi adalah sistem pertandingan yang mempertemukan sebuah tim dengan seluruh tim lainnya sebanyak satu kali. Sistem setengah kompetisi biasanya diterapkan pada sebuah turnamen olahraga untuk babak penyisihan dan biasanya dilanjutkan dengan sistem gugur untuk menentukan pemenang.

#	Group F	P	W	D	L	F	A	GD	Pts
1	Argentina	3	3	0	0	6	3	3	9
2	Nigeria	3	1	1	1	3	3	0	4
3	Bosnia-Herzegovina	3	1	0	2	4	4	0	3
4	Iran	3	0	1	2	1	4	-3	1

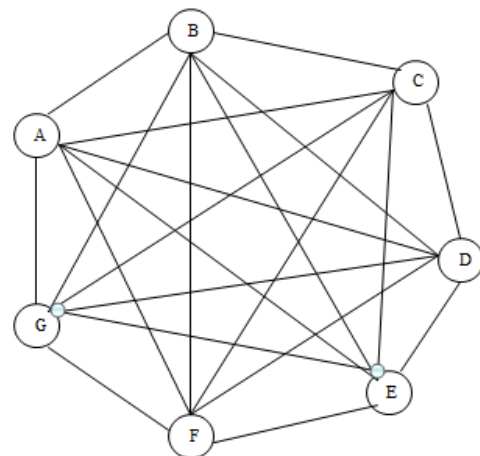
[8] Gambar 5. Piala Dunia menggunakan sistem setengah kompetisi untuk penyisihan

III. PENERAPAN PEWARNAAN GRAF PADA PENJADWALAN PERTANDINGAN OLAHRAGA SISTEM SETENGAH KOMPETISI

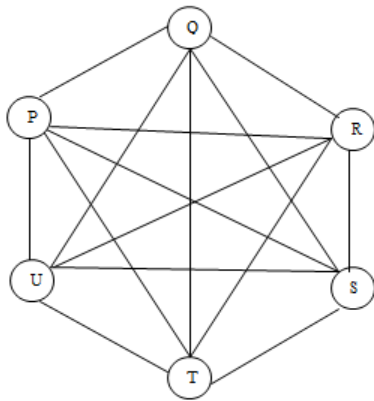
Pada suatu universitas, terdapat 13 fakultas yang membentuk tim untuk bertanding dalam liga olahraga mahasiswa tingkat universitas tersebut. Liga mahasiswa ini dilaksanakan dengan sistem setengah kompetisi. Liga mahasiswa dibagi menjadi dua divisi, yaitu divisi utama dan divisi 1. Divisi utama terdiri atas 7 tim dan divisi 1 terdiri dari 6 tim. Universitas hanya memiliki 3 buah lapangan dan setiap harinya pertandingan dilakukan dalam 2 kloter, yaitu pagi dan sore. Hari pertandingan dalam satu divisi harus berselang satu hari dan pertandingan divisi satu harus lebih dulu selesai dibandingkan dengan divisi utama. Keterbatasan ini membuat penjadwalan pertandingan menjadi sangat penting karena efektivitas penjadwalan memengaruhi lamanya kompetisi ini berlangsung.

Banyaknya tim yang bertanding dan pembagian menjadi dua divisi memungkinkan liga mahasiswa ini berlangsung lama. Semakin lama kompetisi berlangsung maka semakin banyak dana yang dibutuhkan. Dengan aturan aturan dan keterbatasan diatas, ketua pelaksana ingin mengetahui jumlah hari minimum yang mungkin untuk melaksanakan liga mahasiswa ini. Semakin sedikit hari pelaksanaan, maka semakin sedikit pula jumlah pengeluaran.

Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan teori graf, khususnya pewarnaan graf. Hal pertama yang harus dilakukan adalah merepresentasikan sistem pertandingan setengah kompetisi dengan menggambar graf. Kita misalkan peserta divisi utama adalah fakultas A, B, C, D, E, F, dan G. Sedangkan peserta divisi 1 adalah P, Q, R, S, T, dan U. Pertandingan sistem setengah kompetisi kedua divisi tersebut dapat direpresentasikan sebagai berikut.



Gambar 6. Representasi sistem setengah kompetisi (*round-robin*) divisi utama dengan graf lengkap.



Gambar 7. Representasi sistem setengah kompetisi (round-robin) divisi satu dengan graf lengkap.

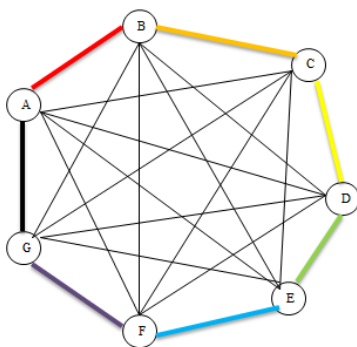
Simpul menandakan tim dan sisi menandakan pertandingan yang terjadi.

Setelah direpresentasikan dalam bentuk graf, langsung saja mulai algoritma pewarnaan sisi pada graf. Dimulai dari pewarnaan graf pertandingan divisi utama. Berdasarkan teorema vizing dan teorema pewarnaan graf lengkap, karena peserta divisi utama berjumlah ganjil, yakni 7 peserta, maka jumlah warna yang dibutuhkan adalah

$$\chi'(K_7) = 7 \text{ warna}$$

Maksimum banyaknya sisi graf lengkap K_n yang dapat diberi warna sama adalah $(n-1)/2$ karena setiap 2 sisi yang berlainan bertemu pada simpul yang sama.

Untuk divisi utama ini, lakukan algoritma pewarnaan graf lengkap untuk n ganjil.

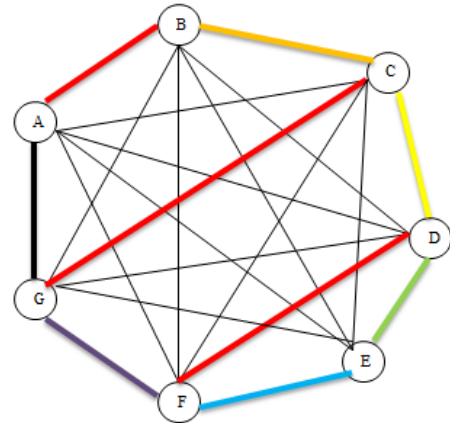


Gambar 8. Warnai semua sisi terluar graf lengkap dengan warna yang berbeda

Gambar 8 menunjukkan langkah pertama dalam pewarnaan graf lengkap dengan n ganjil, yaitu mewarnai seluruh sisi terluar graf dengan warna berbeda. Dalam hal ini karena ada 7 simpul maka graf diwarnai dengan 7 warna yang berbeda pula.

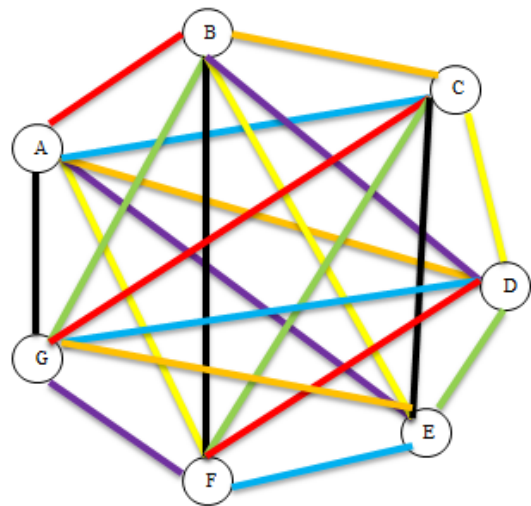
Langkah selanjutnya adalah mewarnai sisi-sisi dalam graf lengkap dengan warna-warna yang sudah ada. Langkah awal pada tahap ini adalah memilih sisi dalam yang akan diwarnai. Pewarnaan sisi-sisi dalam graf lengkap ini dilakukan dengan mencari sisi yang sejajar dengan salah satu sisi terluar pada graf lengkap. Pada kasus ini, jumlah sisi yang memiliki warna sama dapat dihitung dengan $(7-1)/2 = 3$, yang berarti terdapat 3 sisi

yang memiliki warna sama.



Gambar 9. Pilih sisi yang sejajar dengan salah satu sisi terluar dan warnai dengan warna yang sama.

Lakukan langkah-langkah tersebut hingga semua sisi diwarnai. Graf akan menghasilkan graf dengan sisi berwarna yang setiap warna yang sama berarti pertandingan dapat dilakukan dengan pada saat bersamaan. Graf yang lengkap diwarnai dapat dilihat pada gambar 10.



Gambar 10. Pewarnaan sisi graf lengkap dengan $n = 7$.

Dari pewarnaan graf tersebut, dapat dibuat penjadwalan pertandingan dengan sisi yang berwarna sama dapat dilaksanakan dalam satu waktu di tempat yang berbeda. Jadwal yang diperoleh adalah sebagai berikut.

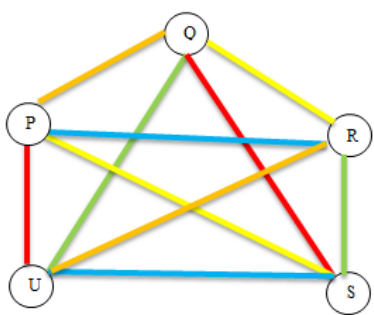
Lapangan 1	Lapangan 2	Lapangan 3
A vs B	C vs G	D vs F
B vs C	A vs D	E vs G
C vs D	B vs E	A vs F
D vs E	C vs F	B vs G
E vs F	D vs G	A vs C
B vs D	A vs E	F vs G
A vs G	B vs F	C vs E

Tabel 2. Jadwal pertandingan divisi utama

Untuk divisi 1, jumlah peserta berjumlah genap, yaitu 6 tim. Maka menurut Teorema Vizing dan teorema pewarnaan sisi pada graf lengkap, jumlah warna yang dibutuhkan untuk mewarnai graf tersebut adalah

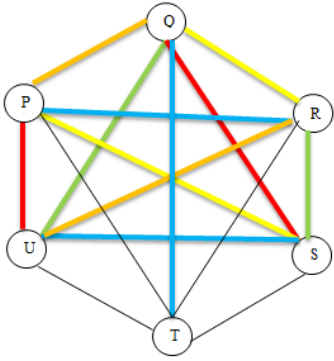
$$\chi'(K_6) = 6 - 1 = 5 \text{ warna}$$

Langkah pertama yang dilakukan dalam pewarnaan sisi graf lengkap dengan jumlah sisi genap adalah menghapus salah satu simpul. Dalam kasus ini, misal kita menghapus simpul T. Lalu lakukan pewarnaan sisi untuk graf lengkap dengan 5 simpul.



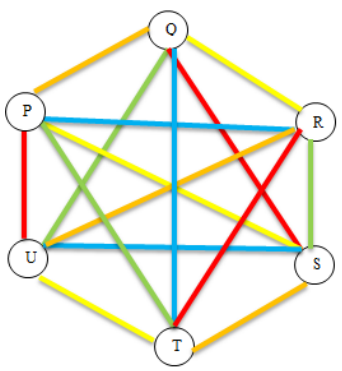
Gambar 11. Penghapusan simpul T dan pewarnaan graf lengkap dengan n = 5.

Setela itu, tambahkan kembali simpul T dan warnai sisi dengan warna yang berbeda dengan sisi yang bersisian dengannya.



Gambar 12. Penambahan kembali simpul T dan proses pewarnaan sisi.

Setelah semua sisi diwarnai, graf yang dihasilkan adalah sebagai berikut.



Gambar 13. Pewarnaan graf lengkap dengan n = 6.

Penjadwalan untuk divisi satu juga dilakukan dengan cara yang sama dengan divisi utama, yaitu dengan melihat warna yang sama pada graf. Hasil penjadwalan pertandingan divisi satu adalah sebagai berikut.

Lapangan 1	Lapangan 2	Lapangan 3
P vs U	Q vs S	R vs T
P vs Q	R vs U	S vs T
Q vs R	P vs S	T vs U
P vs T	Q vs U	R vs S
P vs R	S vs U	Q vs T

Tabel 3. Jadwal pertandingan divisi 1.

Dari pewarnaan kedua graf tersebut kita sudah memperoleh jadwal untuk pertandingan divisi utama dan jadwal untuk pertandingan divisi satu. Berdasarkan kondisi yang diberikan, yaitu satu hari pertandingan terdapat 2 kloter, yaitu pagi dan sore, terdapat 3 buah lapangan yang terdapat pada universitas tersebut, hari pertandingan divisi yang sama tidak boleh berturut-turut, serta pertandingan divisi satu harus selesai lebih dulu, jadwal pertandingan yang efektif adalah sebagai berikut.

Hari	Kloter	Lap. 1	Lap. 2	Lap. 3
1	Pagi	A vs B	C vs G	D vs F
	Sore	B vs C	A vs D	E vs G
2	Pagi	P vs U	Q vs S	R vs T
	Sore	P vs Q	R vs U	S vs T
3	Pagi	C vs D	B vs E	A vs F
	Sore	D vs E	C vs F	B vs G
4	Pagi	Q vs R	P vs S	T vs U
	Sore	P vs T	Q vs U	R vs S
5	Pagi	E vs F	D vs G	A vs C
	Sore	B vs D	A vs E	F vs G
6	Pagi	P vs R	S vs U	Q vs T
	Sore	-	-	-
7	Pagi	A vs G	B vs F	C vs E
	Sore	-	-	-

Tabel 4. Jadwal liga olahraga mahasiswa

Dari tabel tersebut dapat diketahui bahwa jumlah hari pelaksanaan kompetisi liga olahraga mahasiswa paling sedikit adalah 7 hari.

IV. KESIMPULAN

Teori graf sangat bermanfaat dalam menyelesaikan permasalahan sehari-hari. Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan dengan teori graf adalah masalah penjadwalan. Penjadwalan dilakukan agar tidak ada kegiatan yang berbenturan. Penjadwalan juga dapat dilakukan dengan jumlah hari yang minimum agar tidak memakan banyak waktu untuk sebuah kegiatan.

Permasalahan penjadwalan dapat ditemui di kompetisi olahraga sistem setengah kompetisi. Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan salah satu aplikasi pewarnaan graf, yaitu pewarnaan sisi graf lengkap. Jadwal dapat disusun berdasarkan warna yang terdapat pada graf lengkap. Pewarnaan sisi ini dapat digunakan untuk

mendapatkan jumlah hari minimum pertandingan sistem setengah kompetisi. Pada kasus yang diberikan, jumlah minimum hari pelaksanaan pertandingan adalah 7 hari.

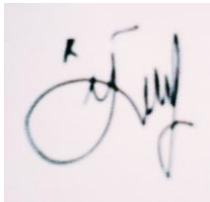
REFERENSI

- [1] Munir, Rinaldi, *Diktat Kuliah IF2120, Matematika Diskrit, Edisi Keempat*, Program Studi Teknik Informatika, STEI, ITB, 2006
- [2] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematic and Application to Computer Science 7th edition*, Mc Graw-Hill 2007.
- [3] Giriwijoyo, Y.S Santoso, *Manusia dan Olahraga*, Penerbit ITB
- [4] <http://ws-or.blogspot.com> diakses pada 9 Desember 2014 pukul 22.03
- [5] oktamira.files.wordpress.com/2010/12/pewarnaan-sisi-pada-graph diakses pada 9 Desember 2014 pukul 00.11
- [6] http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/198207282005012-KARTIKA_YULIANTI/HANDOUT_TEORI_GRAF_N2.pdf diakses pada 10 Desember 2014 pukul 06.22
- [7] <https://www.scribd.com/doc/94559203/Buku-Teo-graf> diakses pada 10 Desember 2014 pukul 06.34
- [8] <http://www.beritau.net/2014/06/klasemen-akhir-grup-di-piala-dunia-2014.html/klasemen-akhir-grup-f-piala-dunia-2014> diakses pada 10 Desember 2014 pukul 07.18

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 10 Desember 2014



Ryan Yonata (13513074)