PERANAN INDUKSI MATEMATIKA DALAM PEMBUKTIAN MATEMATIKA

Riani Rilanda – NIM : 13505051

Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha 10, Bandung
e-mail : if15051@students.if.itb.ac.id

Abstrak

Makalah ini membahas tentang induksi matematika, sebuah metode untuk membuktikan pernyataan mengenai objek diskrit. Pembuktian matematika, melibatkan berbagai macam pembuktian matematika dan formulasi conjecture. Penerapan induksi matematika di dalam matematika yang menjadi pokok bahasan utama dari makalah ini akan menjabarkan bagaimana induksi matematika dapat membuktikan sebuah masalah matematika.

Induksi matematika merupakan metoda pembuktian yang dapat pula digunakan dalam pembuktian kebenaran algoritma. Induksi matematika memiliki tiga tahapan pembuktian. Tahap pertama, ialah langkah basis dimana tahapan ini untuk membuktikan bila p(n), n = 1 benar. Tahap kedua, merupakan tahap langkah induksi, tahapan yang membuktikan bila p(n) benar maka p(n+1) benar. Tahapan terakhir ialah konklusi, yang menyatakan bahwa semua p(n) adalah benar bila kedua tahapan sebelumnya benar.

Pembuktian matematika membahas tentang strategi pembuktian. Bukti langsung, bukti tak langsung, dan bukti kontradiksi. Proses yang digunakan dalam melakukan proses pembuktian ialah proses maju-mundur, yaitu proses yang memerlukan titik awal. Formulasi conjecture yaitu conjecture yang diformulasikan dengan didasarkan pada beberapa kemungkinan evidence untuk membuktikan apakah conjecture tersebut benar atau salah.

Penerapan induksi matematika dalam pembuktian sebuah masalah matematika memiliki tiga prinsip induksi. Pertama induksi matematika sederhana, sebuah pembuktian dengan metode bukti langsung, lalu induksi matematika kuat dan induksi matematika yang dirampatkan. Induksi matematika sebuah metoda pembuktian matematika yang valid.

BAB 1 PEMBUKTIAN MATEMATIKA

1.1 Strategi Pembuktian

Matematikawan memformulasikan *conjecture* dan kemudian mencoba membuktikan bahwa *conjecture* tersebut benar atau salah.

Ketika dihadapkan dengan pernyataan yang akan dibuktikan:

- terjemahkan setiap istilah dengan definisinya
- analisa arti dari hipotesis dan kesimpulan
- coba membuktikan dengan menggunakan salah satu dari metoda pembuktian

Jika pernyataan berupa implikasi; coba buktikan dengan bukti langsung. Bila gagal, coba dengan bukti tak langsung. Bila tidak berhasil juga coba dengan bukti kontradiksi.

<u>Bukti langsung</u>
Implikasi p $\rightarrow$ q dapat dibuktikan dengan menunjukkan jika p benar maka q juga harus benar

<u>Bukti tak langsung</u>
Karena p $\rightarrow$ q ekivalen dengan –q $\rightarrow$ –p maka p $\rightarrow$ q dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa –q $\rightarrow$ –p benar.

<u>Bukti kontrakdiksi</u>
Bukti tak langsung $\rightarrow$ bukti dengan kontradiksi

1.2 Proses Maju Mundur

Apa pun metoda yang digunakan, dalam melakukan proses pembuktian diperlukan titik awal.
Proses maju:

hipotesis $\xrightarrow{\text{aksioma \& teorema}}$ kesimpulan

Namun seringkali, proses maju sukar untuk digunakan dalam pembuktian sesuatu yang tidak sederhana. Sehingga kita harus mengkombinasikan dengan proses mundur.

Contoh Kasus 1 :

Tunjukkan bahwa jika segitiga siku-siku RST dengan sisi tegak r, s, dan sisi miring t

mempunyai luas t2/4, maka segitiga tersebut sama kaki.

Solusi :
A: Segitiga RST dengan sisi r, s dan sisi miring t dengan luas t2/4.
A1: rs/2 = t2/4
A2: (r2+s2) = t2.
A3: rs/2 = (r2+s2)/4
A4: (r2-2rs+s2) = 0
A5: (r-s)2 = 0.
B2: r-s = 0
B1: r = s
B: Segitiga RST sama kaki.

Bukti 1.
Dari hipotesis dan rumus luas segitiga siku-siku,
Luas RST = rs/2 = t2/4.
Hukum Pythagoras memberikan r2+s2=t2, dan bila r2+s2 disubstitusikan kedalam t2, dengan sedikit manipulasi aljabar didapat (r-s)2=0. Sehingga r=s dan segitiga RST samakaki.

Bukti 2.
Hipotesis dengan hukum Pythagoras menghasilkan r2+s2=2rs; sehingga (r-s) = 0. Maka segitiga RST samakaki.

1.3 Conjecture

Buku matematika secara formal hanya menyajikan teorema dan bukti saja.
Melalui penyajian seperti ini, kita tidak dapat mengetahui proses pencarian (*discovery process*) dalam matematika

Proses ini meliputi:

- eksplorasi konsep & contoh,
- formulasi *conjecture*, dan
  (*Conjecture* diformulasikan dengan didasarkan pada beberapa *possible evidence*.)

- usaha menjawab *conjecture* dengan bukti atau *counterexamples*.

<u>Memformulasikan conjecture</u>
Perhatikan berikut ini:

- 24 – 1 = 15 = 3 · 5
- 25 – 1 = 31 prima
- 26 – 1 = 63 = 7 · 9
- 28 – 1 = 255 = 5 · 51
- 34 – 1 = 80 = 8 · 10

Kita tahu bhw xn – 1 = (x-1)(xn-1 +xn-2 + … + x + 1)
Namun, faktorisasi ini bermasalah bila x=2.
Conjecture.
Bilangan an-1 komposit bila a > 2 atau bila a=2 dan n komposit.

<u>Membuktikan conjecture</u>
Bukti.
Kasus i)
Bila a > 2 maka (a-1) adalah faktor dari an-1 karena an – 1 = (a-1)(an-1 +an-2 + … + a + 1) dan 1 < (a-1) < (an-1).

Kasus ii)
Bila a=2 dan n komposit maka
ada s dan t sehingga n = st dengan 1 < s ≤ t < n.
Sehingga, 2s-1 faktor dari 2n-1
karena 2n – 1 = (2s-1)(2s(t-1) +2s(t-2) + … + 2s + 1).
Jadi 2n – 1 komposit.

Jadi *conjecture* menjadi teorema.

-

<u>Conjecture dan counterexamples</u>
Apakah ada fungsi f sehingga f(n) prima untuk semua bilangan bulat positif n ?
Conjecture. f(n) = n2 – n +41.

Karena f(1) = 41, f(2) = 43, f(3) = 47, f(4)= 53, ….
Tapi… f(41) = 412 komposit. Jadi f(n) bukan fungsi penghasil bilangan prima. Conjecture salah.
Untuk setiap polinom f(n) dengan koefisien bulat senantiasa ada bilangan bulat y sehingga f(y) komposit.

<u>Beberapa conjeture terkenal</u>

1. *Fermat's Last Theorem*
   Persamaan xn + yn = zn tidak mempunyai solusi bulat x, y, dan z dengan xyz ≠ 0 dan n > 2.
2. *Goldbach's Conjecture* (1742)
   Goldbach: "Setiap bilangan bulat ganjil n, n > 5, dapat ditulis sebagai jumlah 3 bilangan prima."
   Euler: ekivalen dengan "Setiap bilangan bulat genap n, n > 2, dapat ditulis sebagai jumlah 2 bilangan prima."
   Telah dicek dengan komputer bhw Goldbach's conjecture benar utk semua bilangan ≤ 4 . 1014.
3. *The Twin Prime Conjecture*
4. *The 3x+1 Conjecture* (Collatz problem, Hasse's algorithm, Ulam's problem, Syracuse problem, Kakutani's problem).

BAB 2 INDUKSI MATEMATIKA

2.1 Pengenalan Dasar Induksi Matematika

Apa itu induksi matematika ?

Induksi matematika ialah sebuah teknik pembuktian pernyataan yang berkaitan dengan objek diskrit (kompleksitas algoritma, teorema mengenai graf, identitas dan ketidaksamaan yang melibatkan bilangan bulat, dsb) yang sangat penting.

Induksi matematika tidak dapat digunakan untuk menemukan rumus atau teorema tetapi hanya sekedar untuk melakukan pembuktian.

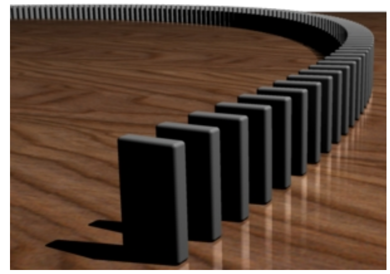
Memiliki tiga tahapan :
1. Langkah basis
2. Langkah induksi
3. Konklusi

Bentuk induksi secara umum

Relasi biner "<" pada himpunan X dikatakan terurut dengan baik (atau himpunan X dikatakan terurut dengan baik dengan "<") bila memiliki properti berikut:
(i) Diberikan $x, y, z \in X$, jika $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.
(ii) Diberikan x, $y \in X$. Salah satu dari kemungkinan ini benar: $x < y$ atau $y < x$ atau $x = y$.
(iii) Jika A adalah himpunan bagian tidak kosong dari X, terdapat elemen $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq y$ untuk semua $y \in A$. Dengan kata lain, setiap himpunan bagian tidak kosong dari X mengandung "elemen terkecil".

Ilustrasi (analogi kasus)

- Sederetan orang menyebarkan rahasia
- Efek domino yang dijajarkan dan kemudian dijatuhkan



Gambar 1.1 Efek Domino

2.2 Aksioma Induksi Matematika

Pertama-tama kita diperkenalkan pada bilangan adalah bilangan untuk menghitung yang ditandai dengan 1,2,3,4,5,... dan seterusnya, yang selanjutnya disebut dengan bilangan asli. Ada tak hingga banyak bilangan asli. Himpunan bilangan asli dilambangkan dengan N={1,2,3,4,5,...}. 1,2,3,4,5,... dan seterusnya dikatakan sebagai unsur dari N. 1 unsur dari N dilambangkan dengan 1UN.

Sejak di Sekolah Dasar, kita juga diperkenalkan dengan bilangan-bilangan 1,3,5,7,...dan seterusnya yang dinamai bilangan ganjil. Bilangan ganjil dirumuskan dengan 2n-1 dengan nUN. Sebagai contoh untuk:

- n=1, maka 2n-1=2(1)-1=1
- n=2. maka 2n-1=2(2)-1=3
- n=3, maka 2n-1=2(3)-1=5
- n=4, maka 2n-1=2(4)-1=7

dan seterusnya. Ada tak hingga banyak bilangan ganjil. Jadi penjumlahan (*) dapat dipandang berturut-turut sebagai berikut:

- Penjumlahan satu bilangan ganjil pertama, yang ditandai dengan $P(1)=1=1^2$.
- Penjumlahan dua bilangan ganjil pertama, yang ditandai dengan $P(2)=1+3=2^2$.
- Penjumlahan tiga bilangan ganjil pertama, yang ditandai dengan $P(3)=1+3+5=3^2$.

- Penjumlahan empat bilangan ganjil pertama, yang ditandai dengan $P(4)=1+3+5+7=4^2$/

Dengan mengamati penjumlahan P(1), P(2), P(3), P(4), ... satu-satu, maka kita peroleh bentuk umum penjumlahan n bilangan ganjil pertama, yang ditandai dengan:

$P(n)=1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$ (**)

(P(n) dibaca: dengan P indeks n.

Apakah penjumlahan 2.000 bilangan ganjil pertama yang ditandai dengan $P(2.000)=2.000^2=4.000.000$? Apakah penjumlahan (**) akan senantiasa berlaku untuk setiap nUN?

Untuk menjawab pertanyaan diatas, kita akan menkaji sebuah metoda yang dilandasi oleh aksioma induksi matematika yang berlaku dalam himpunan bilangan asli N, Tapi sebelumnya, kita harus mengetahui apa yang dimaksud dengan himpunan bagian dan himpunan terurut.

Definisi Himpunan Bagian:
Misalkan N himpunan bilangan asli. Himpunan S dikatakan himpunan bagian dari N, jika dan hanya jika untuk setiap xUS maka xUN.

S himpunan bagian dari N dilambangkan dengan:

S=N.

Pernyataan jika dan hanya jika mempunyai makna jika himpunan S=N maka untuk setiap xUS DxUN dan sebaliknya jika dalam suatu himpunan berlaku untuk setiap xUS D xUN maka S=N.
(tanda D dibaca: maka)

Suatu himpunan dikatakan terurut jika dan hanya jika setiap himpunan bagiannya yang tak kosong memiliki unsur terkecil. Yang dimaksud dengan himpunan tak kosong adalah himpunan yang mempunyai unsur, sebaliknya himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai unsur. Sudah jelas himpunan N merupakan himpunan terurut.

<u>Aksioma induksi matematika</u>

Misalkan N himpunan bilangan asli. Misalkan S=N yang memenuhi sifat(***):

1. 1US
2. Jika kUS , maka (k+1)US untuk suatu k bilangan asli

Maka S=N
Bilangan yang merupakan indeks dari P adalah 1,2,3, ...,n merupakan unsur dari himpunan bilangan asli N. Sehingga dari aksioma induksi matematika, kita bisa menurunkan suatu metoda untuk menunjukkan bahwa kebenaran penjumlahan (**):

P(n)=1+3+5+7+...+(2n-1)=n2 untuk setiap nUN.

Metoda tersebut terdiri dari 2 langkah, yaitu:<BR<

1. Kita tunjukkan P(1) benar.
2. Kita tunjukkan untuk suatu kUN, jika P(k) benar, maka P(k+1) juga benar.

Dua langkah diatas mengukuhkan P(n) benar untuk setiap nUN
Langkah 1: $P(1)=1^2$. Jelas P(1) benar.
Langkah 2: Ambil sembarang kUN. Misalkan P(k) benar. Maka penjumlahan k bilangan ganjil pertama dapat dituliskan sebagai berikut: $P(k)=1+3+5+7+...+(2k-1)=k^2$

Selanjutnya harus ditunjukkan:
$P(k+1)=(k+1)^2$.

Bilangan ganjil yang berada pada urutan setelah (2k-1) adalah 2k-1+2. Sehingga dapat dituliskan:

P(k+1)=[1+3+5+7+...+(2k-1)]+(2k-1+2)

Dengan penjumlahan aljabar yang telah kita kenal dibangku Sekolah Lanjutan Tingkat Pertama (SLTP), kita peroleh 2k-1+2=2k+1. Selanjutnya dapat dituliskan:

P(k+1)=[1+3+5+7+...+(2k-1)]+(2k+1)

Karena $1+3+5+7+...+(2k-1)= k^2$, maka:

$$P(k+1)=k^2+(2k+1)= k^2+2k+1$$

Dengan pemfaktoran yang juga telah diperkenalkan sejak di bangku SLTP, kita peroleh:

$$P(k+1)=(k+1)^2.$$

Jadi, telah kita tunjukkan jika P(k) benar, maka P(k+1) juga benar.

Dengan terpenuhinya kedua langkah diatas, maka dapat kita katakan penjumlahan n bilangan ganjil yang pertama yang ditandai dengan:

P(n)ƒ¤1+3+5+7+...+(2n-1)=n2 adalah benar untuk setiap nUN

Masih banyak pemasalahan matematika lain yang dapat ditunjukkan kebenarannya dengan metoda ini. Diantaranya adalah hukum-hukum eksponen $(a^m)^n=a^{mn}$,$(ab)^n=a^nb^n$, $1^n=1$ dengan m,Nun

BAB 3 INDUKSI MATEMATIKA DALAM PEMBUKTIAN MASALAH MATEMATIKA

3.1 Penerapan Induksi Matematika dalam Pembuktian Matematika

Induksi matematika sederhana

Induksi matematika ialah teknik untuk membuktikan proposisi dalam bentuk $\forall n\ P(n)$, dengan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan bulat positif.
Suatu bukti dengan menggunakan induksi matematika bahwa
"P(n) benar untuk setiap n bilangan bulat positif "
terdiri dari tiga langkah:

1. Langkah basis:
   Tunjukkan bahwa P(1) benar.
2. Langkah induktif:
   Tunjukkan bahwa P(k) $\rightarrow$ P(k + 1) benar untuk setiap k.
   P(k) untuk suatu k tertentu disebut hipotesa induksi.
3. Konklusi:
   $\forall n\ P(n)$ bernilai benar.

Contoh kasus 1 :
Berapakah jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama?

Solusi :
Tebakan: "Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n^2."
Bukti:
Misalkan P(n): proposisi "Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n2."

1. Langkah basis:
   P(1) benar, karena $1 = 1^2$.
2. Langkah induktif:
   Asumsikan bahwa P(k) benar untuk semua k, yaitu
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$.
   Kita perlu menunjukkan bahwa P(k + 1) benar, yaitu
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$.
   $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$
3. Konklusi:
   "Jumlah dari n bilangan ganjil positif pertama adalah n2."

Akhir dari bukti.

Contoh kasus 2 :
Tunjukkan bahwa n < 2n untuk setiap bilangan bulat positif n.

Solusi:
Misalkan P(n): proposisi "$n < 2^n$."

1. Langkah basis:
   P(1) benar, karena $1 < 2^1 = 2$.
2. Langkah induktif:
   Asumsikan bahwa P(k) benar untuk semua k, yaitu
   $k < 2^k$.
   Kita perlu menunjukkan bahwa P(k + 1) benar, yaitu $k + 1 < 2^{k+1}$
   Kita mulai dari $k < 2^k$
   $k + 1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$
   Jadi, jika $k < 2^k$ maka $k + 1 < 2^{k+1}$
3. Konklusi:
   Jadi, $n < 2^n$ benar untuk setiap n bilangan bulat positif.

   Akhir dari bukti.

Contoh kasus 3 :
Tunjukkan bahwa jika S adalah himpunan hingga dengan n anggota, maka S mempunyai 2n subhimpunan.

Solusi :
Misalkan : P(n): proposisi "himpunan hingga dengan n anggota mempunyai 2^n subhimpunan".

1. Langkah basis:
   P(0) benar, karena himpunan dengan nol anggota, yaitu himpunan kosong, mempunyai tepat $2^0 = 1$ subhimpunan.
2. Langkah induktif:
   Asumsikan bahwa P(k) benar untuk semua k, yaitu himpunan dengan k anggota mempunyai 2^k subhimpunan.
   Kita perlu menunjukkan bahwa P(k + 1) benar, yaitu himpunan dengan (k+1) anggota mempunyai $2^{(k+1)}$ subhimpunan.

Misalkan T: himpunan dengan k+1 anggota.
Dapat ditulis $T = S \cup \{a\}$ dengan $a \in T$ dan $S = T - \{a\}$.
Untuk setiap subhimpunan X dari terdapat tepat dua subhimpunan T, yaitu X dan $X \cup \{a\}$, yang membentuk semua subhimpunan T dan semuanya berbeda.
Jadi, terdapat $2 \cdot 2^k = 2^{(k+1)}$ subhimpunan dari T.

3. Konklusi:
   "Jadi, setiap himpunan hingga dengan n anggota mempunyai 2^n subhimpunan"

Akhir dari bukti.

Contoh kasus 4 :
Gauss. $1 + 2 + \ldots + n = n (n + 1)/2$

Solusi :
Misalkan P(n): proposisi $1 + 2 + \ldots + n = n (n + 1)/2$

1. Langkah basis:
   Untuk n = 0 diperoleh peroleh 0 = 0. Jadi, P(0) benar.
2. Langkah induktif:
   Asumsikan bahwa P(k) benar untuk semua k, yaitu $1 + 2 + \ldots + n = n (n + 1)/2$
   Akan ditunjukkan bahwa P(k + 1) benar, yaitu
   $1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = (k + 1) ((k + 1) + 1)/2$
   Dari $1 + 2 + \ldots + k = k (k + 1)/2$, diperoleh
   $1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = k (k + 1)/2 + (k + 1 = (2k + 2 + k (k + 1))/2 = (2k + 2 + k2 + k)/2 = (2 + 3k + k2)/2 = (k + 1) (k + 2)/2 = (k + 1) ((k + 1) + 1)/2$
3. Konklusi:
   Jadi $1 + 2 + \ldots + n = n (n + 1)/2$ benar untuk setiap $n \in N$.

Akhir dari bukti.

Induksi Kuat
(Prinip kedua dalam induksi matematika)

Terdapat bentuk lain dari induksi matematika yang sering dipergunakan dalam bukti. Teknik ini dinamakan induksi kuat atau prinsip kedua dari induksi matematika

Tahapan pengerjaan :

1. Langkah basis:
   Tunjukkan bahwa P(0) benar.
2. Langkah induktif:
   Tunjukkan bahwa jika P(0) dan P(1) dan … dan P(k) benar, maka P(k + 1) untuk setiap $k \in N$.
3. Konklusi:
   $\forall n$ P(n) bernilai benar.

Contoh kasus 1 :
Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Solusi :
Misalkan :
P(n): proposisi "setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima".

1. Langkah basis:
   P(2) benar, karena 2 adalah hasil kali dari satu bilangan prima, dirinya sendiri.
2. Langkah induktif:
   Asumsikan P(j) benar untuk semua bilangan bulat j, 1 < j″k.
   Harus ditunjukkan bahwa P(k+1) juga benar.
   Ada dua kasus yang mungkin:
   - Jika (k + 1) *bilangan prima*, maka jelas P(k + 1) benar.
   - Jika (k + 1) *bilangan komposit*, (k+1) dapat ditulis sebagai perkalian dua buah bilangan bulat a dan b sehingga $2 \le a \le b < k + 1$.

   Oleh *hipotesa induksi*, a dan b keduanya dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan prima. Jadi, $k + 1 = a \cdot b$ dapat ditulis sebagai hasil kali bilangan prima.

3. Konklusi:
   "Setiap bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dapat dituliskan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima".

Akhir dari bukti.

Induksi yang Dirampatkan
(Prinip ketiga dalam induksi matematika)

Misalkan p(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$, jika p(n) benar maka p(n+1) juga benar.

Contoh kasus 1:
Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Solusi :

1. Basis induksi.
   Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh:
   $$2^0 = 2^{0+1} - 1.$$
   Ini jelas benar, sebab $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$
   $= 2^1 - 1$
   $= 2 - 1 = 1$
2. Langkah induksi.
   Andaikan bahwa untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*,

   $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

   adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa

   $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$

   juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

   $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$ (dari hipotesis induksi)
   $= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 = (2 \cdot 2^{n+1}) - 1$
   $= 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$

3. Konklusi
   Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

<u>Induksi matematika suatu pembuktian yang valid</u>

Validitas dari induksi matematika dapat diturunkan dari suatu aksioma fundamental tentang himpunan bilangan bulat.

Sifat Terurut dengan Baik
(Well-Ordering Property)
Setiap himpunan bilangan bulat positif yang tak kosong selalu memiliki anggota terkecil.

Misalkan kita tahu bahwa P(1) benar dan P(k) P(k + 1) juga benar untuk semua k bilangan bulat positif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir, Rinaldi. (2006). Diktat Kuliah IF2153 Matematika Diskrit. Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung.

[2] Wikipedia (2006), *Mathematica Induction*. http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction. Tanggal akses : 31 Desember 2006 pukul 18.51.

[3] Wisnu. (2005). Persoalan atau Persoalan yang Lebih Sederhana. www.geocities.com/akarnaisea/paper/ak4-0.pdf. Tanggal akses : 31 Desember 2006 pukul 18.07

[4] Tarmidi, Rini DS. Aksioma Induksi Matematika. www.isekolah.org/file/h_1091252263.do. Tanggal akses : 29 Desember 2006 pukul 23.25

[5] Matematika ITB. Induksi Matematika. www.math.itb.ac.id/~diskrit/Kuliah4baru.ppt. Tanggal akses : 30 Desember 2006 pukul 12.20

[6] Matematika ITB. Strategi Pembuktian. www.math.itb.ac.id/~diskrit/Kuliah3baru.ppt. Tanggal akses : 31 Desember 2006 pukul 18.40

[7] Matematika ITB. Metode Pembuktian. www.math.itb.ac.id/~diskrit/Kuliah2.ppt. Tanggal akses : 31 Desember 2006 pukul 18.40