Bab 7

Turunan Numerik

Lebih banyak lagi yang terdapat di langit dan di bumi, Horatio, daripada yang kau mimpikan di dalam filosofimu.
(Hamlet)

Setiap mahasiswa yang pernah mengambil kuliah kalkulus tentu masih ingat dengan turunan fungsi yang didefenisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(P.7.1)}$$

Persoalan menghitung turunan fungsi cukup banyak muncul dalam bidang rekayasa. Misalnya dalam bidang pengolahan citra (*image processing*), turunan fungsi diterapkan untuk mendeteksi sisi (*edge*) obyek pada suatu citra (lihat bagian terakhir bab ini). Sementara dalam perhitungan numerik sendiri, turunan fungsi dalam orde yang lebih tinggi, f', f'', f''', ..., kadang-kadang diperlukan. Misalnya untuk menghitung batas-batas galat interpolasi polinom dengan rumus

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \;, \; x_0 \le \xi \le x_n$$

atau untuk menghitung galat integrasi numerik dengan aturan trapesium :

$$E(x) = \frac{-1}{12}(b-a)\, h^2 f''(t) \;, \qquad a \le t \le b$$

Bila persamaan fungsi $f(x)$ diberikan secara eksplisit, maka kita dapat menentukan fungsi turunannya, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n+1)}(x)$, lalu menggunakannya untuk menghitung nilai turunan fungsi di $x = t$.

Seringkali fungsi $f(x)$ tidak diketahui secara eksplisit, tetapi kita hanya memiliki beberapa titik data saja. Pada kasus seperti ini kita tidak dapat menemukan nilai turunan fungsi secara analitik. Sebaliknya, pada kasus lain, meskipun $f(x)$ diketahui secara eksplisit tetapi bentuknya rumit sehingga menentukan fungsi turunannya merupakan pekerjaan yang tidak mangkus dan tidak praktis, misalnya pada fungsi-fungsi berikut ini :

(i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos(2x^2) + x\tan(3x)}}{\sin(x) + e^x - 2x/\cos(x)}$,

(ii) $f(x) = x\, e^{(2x+2)}\, ln\,(4x^2)$,

(iii) dan sebagainya.

Untuk kedua kasus terakhir, perhitungan nilai turunan dapat dikerjakan secara numerik (*numerical differentiation* atau *numerical derivative*). Nilai turunan yang diperoleh merupakan nilai hampiran. Sebagaimana halnya pada integrasi numerik, perhitungan turunan numerik juga menggunakan nilai-nilai diskrit. Karena itu, fungsi dalam bentuk tabel merupakan bentuk alami untuk perhitungan turunan.

7.1 Persoalan Turunan Numerik

Persoalan turunan numerik ialah menentukan hampiran nilai turunan fungsi f yang diberikan dalam bentuk tabel. Meskipun metode numerik untuk menghitung turunan fungsi tersedia, tetapi perhitungan turunan sedapat mungkin dihindari. Alasannya, nilai turunan numerik umumnya kurang teliti dibandingkan dengan nilai fungsinya. Dalam kenyataannya, turunan adalah limit dari hasil bagi selisih: yaitu pengurangan dua buah nilai yang besar ($f(x+h) - f(x)$) dan membaginya dengan bilangan yang kecil (h). Pembagian ini dapat menghasilkan turunan dengan galat yang besar. Lagi pula, jika fungsi f dihampiri oleh polinom interpolasi p, selisih nilai fungsi mungkin kecil tetapi turunannya boleh jadi sangat berbeda dengan nilai turunan sejatinya. Hal ini masuk akal sebab turunan numerik bersifat "halus", dan ini berlawanan dengan integrasi numerik, yang tidak banyak dipengaruhi oleh ketidaktelitian nilai fungsi, karena integrasi pada dasarnya adalah proses penghalusan [KRE88].

7.2 Tiga Pendekatan dalam Menghitung Turunan Numerik

Misal diberikan nilai-nilai x di $x_0 - h$, x_0, dan $x_0 + h$, serta nilai fungsi untuk nilai-nilai x tersebut. Titik-titik yang diperoleh adalah (x_{-1}, f_{-1}), (x_0, f_0), dan (x_1, f_1), yang dalam hal ini $x_{-1} = x_0 - h$ dan $x_1 = x_0 + h$. Terdapat tiga pendekatan dalam menghitung nilai $f\,'(x_0)$:

1. Hampiran selisih-maju *(forward difference approximation)*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h} \qquad \text{(P.7.2)}$$

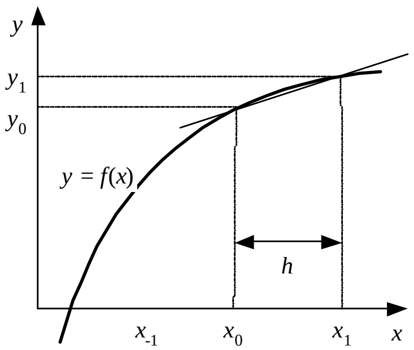
2. Hampiran selisih-mundur *(backward difference approximation)*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \frac{f_0 - f_1}{h} \qquad \text{(P.7.3)}$$

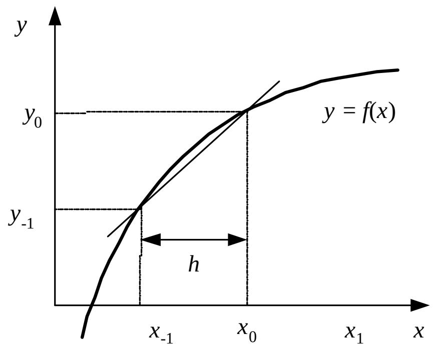
3. Hampiran selisih-pusat *(central difference approximation)*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \qquad \text{(P.7.3)}$$

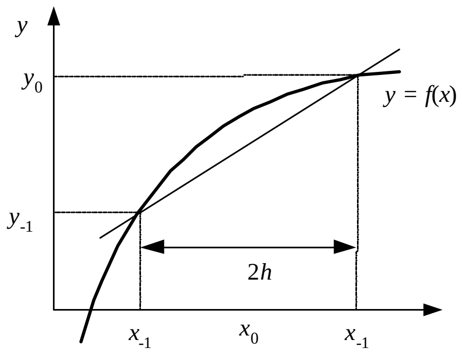
Tafsiran geometri dari ketiga pendekatan di atas diperlihatkan pada Gambar 7.1.



(a) Hampiran selisih-maju



(b) Hampiran selisih-mundur



(c) Hampiran selisih-pusat

Gambar 7.1 Tiga pendekatan dalam perhitungan turunan numerik

Rumus-rumus turunan numerik untuk ketiga pendekatan tersebut dapat diturunkan dengan dua cara, yaitu:

1. Dengan bantuan deret Taylor
2. Dengan hampiran polinom interpolasi

Kedua cara tersebut menghasilkan rumus yang sama.

7.3 Penurunan Rumus Turunan dengan Deret Taylor

Misalkan diberikan titik-titik (x_i, f_i) , $i = 0, 1, 2, ..., n$, yang dalam hal ini

$$x_i = x_0 + ih$$

dan

$$f_i = f(x_i).$$

Kita ingin menghitung $f'(x)$, yang dalam hal ini $x = x_0 + sh$, $s \in R$ dengan ketiga pendekatan yang disebutkan di atas (maju, mundur, pusat).

(a) Hampiran selisih-maju

Uraikan $f(x_{i+1})$ di sekitar x_i :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + ...$$

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + h^2/2\, f_i'' + ..\ . \qquad \text{(P.7.4)}$$

$$hf_i' = f_{i+1} - f_i - h^2/2\, f_i'' + ...$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - h/2\, f_i''$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

yang dalam hal ini, $O(h) = h/2\, f''(t)$, $x_i < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_0 dan x_1 persamaan rumusnya menjadi:

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \tag{P.7.5}$$

yang dalam hal ini $O(h) = h/2\, f''(t)$, $x_i < t < x_{i+1}$.

(b) Hampiran selisih-mundur

Uraikan $f(x_{i-1})$ di sekitar x_i :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

$$f_{i-1} = f_i - hf_i' + h^2/2\, f_i'' + \ldots \tag{P.7.6}$$

$$hf_i' = f_i - f_{i-1} + h^2/2\, f_i'' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - h/2\, f_i'' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h),$$

yang dalam hal ini, $O(h) = -\, h/2\, f''(t)$, $x_{i-1} < t < x_i$

Untuk nilai-nilai f di x_0 dan x_{-1} persamaan rumusnya menjadi:

$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h) \tag{P.7.7}$$

yang dalam hal ini, $O(h) = -\, h/2\, f''(t)$, $x_{i+1} < t < x_i$.

(c) Hampiran selisih-pusat

Kurangkan persamaan (P.7.4) dengan persamaan (P.7.6):

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf_i' + h^3/3\, f_i''' + \ldots$$

$$2hf_i' = f_{i+1} - f_{i-1} - h^3/3\, f_i''' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} - h^2/6\, f_i''' + \ldots$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2),$$

yang dalam hal ini, $O(h^2) = - h^2/6\, f'''(t)$, $x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_{-1} dan x_1 persamaan rumusnya menjadi:

$$f_o' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \qquad \text{(P.7.8)}$$

yang dalam hal ini, $O(h^2) = - h/6\, f'''(t)$, $x_{i-1} < t < x_{i+1}$.

Perhatikan, bahwa hampiran selisih-pusat lebih baik daripada dua hampiran sebelumnya, sebab orde galatnya adalah $O(h^2)$.

Rumus untuk Turunan Kedua, *f* ''(*x*), dengan Bantuan Deret Taylor

(a) Hampiran selisih-pusat

Tambahkan persamaan (P.7.4) dengan persamaan (P.7.6) di atas :

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2 f_i + h^2 f_i'' + h^4/12\, f_i^{(4)} + \ldots$$

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = h^2 f_i'' + h^4/12\, f_i^{(4)}$$

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} - h^2/12\, f_i^{(4)}$$

Jadi,

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2),$$

yang dalam hal ini, $O(h^2) = - h^2/12\, f^{(4)}(t)$, $x_{i-1} < t < x_{i+1}$

Untuk nilai-nilai f di x_{-1} , x_0, dan x_1 persamaan rumusnya menjadi:

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_1}{h^2} + O(h^2) \qquad \text{(P.7.9)}$$

yang dalam hal ini $O(h^2) = - h^2/12 f^{(4)}(t)$, $x_{i-1} < t < x_{i+1}$.

(b) Hampiran selisih-mundur

Dengan cara yang sama seperti (a) di atas, diperoleh :

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h),$$

yang dalam hal ini $O(h) = h f''(t)$, $x_{i-2} < t < x_i$

Untuk nilai-nilai f di x_{-2} , x_{-1}, dan x_0 persamaan rumusnya :

$$f_0'' = \frac{f_{-2} - 2f_{-1} + f_0}{h^2} + O(h), \qquad \text{(P.7.10)}$$

yang dalam hal ini, $O(h) = h f''(t)$, $x_{i-2} < t < x_i$

(c) Hampiran selisih-maju

Dengan cara yang sama seperti di atas, diperoleh :

$$f_i'' = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} + O(h),$$

yang dalam hal ini, $O(h) = - h f''(t)$, $x_i < t < x_{i+2}$

Untuk nilai-nilai f di x_0 , x_1, dan x_2 persamaan rumusnya :

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h), \qquad \text{(P.7.11)}$$

yang dalam hal ini, $O(h) = - h f''(t)$, $x_1 < t < x_{i+2}$.

7.4 Penurunan Rumus Turunan Numerik dengan Polinom Interpolasi

Misalkan diberikan titik-titik data berjarak sama,

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, ..., n,$$

dan

$$x = x_0 + sh, \; s \in R$$

adalah titik yang akan dicari nilai interpolasinya. Polinom Newton-Gregory yang menginterpolasi seluruh titik data tersebut adalah :

$$\begin{aligned} f(x) \approx p_n(x) &= f_0 + \frac{s\Delta f_0}{1!} + s(s\text{-}1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!} + s(s\text{-}1)(s\text{-}2)\frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \\ &\quad s(s\text{-}1)(s\text{-}2)...(s\text{-} n+1)\frac{\Delta^n f_0}{n!} \\ &= F(s) \end{aligned}$$

yang dalam hal ini, $s = (x\text{-}x_0)/h$.

Turunan pertama dari $f(x)$ adalah :

$$\begin{aligned} f'(x) = df/dx &= \frac{dF}{ds}\frac{ds}{dx} \\ &= (0 + \Delta f_0 + (s\text{-} 1/2)\, \Delta^2 f_0 + (s^2/2 - s + 1/3)\, \Delta 3 f_0 + ...)\, 1/h \\ &= 1/h\, (\Delta f_0 + (s\text{-} 1/2)\, \Delta^2 f_0 + \text{galat}) \qquad \text{(P.7.12)} \end{aligned}$$

Berdasarkan (P.7.12), diperoleh rumus turunan numerik dengan ketiga pendekatan (maju, mundur, pusat) sebagai berikut:

(a) Hampiran selisih-maju

- bila digunakan titik-titik x_0 dan x_1 :

$$f'(x_0) = 1/h\, (\Delta f_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} \qquad \text{(P.7.13)}$$

- bila digunakan titik-titik x_0, x_1, dan x_2 :

$$f'(x_0) = 1/h\ (\Delta f_0 + (s - 1/2)\ \Delta^2 f_0)$$

untuk titik $x_0 \rightarrow s = (x_0 - x_0)/h = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= 1/h\ (\Delta f_0 - 1/2\Delta^2 f_0) \\ &= 1/h\ (\Delta f_0 - 1/2(\Delta f_1 - \Delta f_0)) \\ &= 1/h\ (3/2\ \Delta f_0 - 1/2\ \Delta f_1) \\ &= 1/h\ (3/2\ f_1 - 3/2\ f_0 - 1/2\ f_2 + 1/2\ f_1) \\ &= 1/h\ (-3/2\ f_0 + 2\ f_1 - 1/2\ f_2) \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \qquad \text{(P.7.13)}$$

(b) Hampiran selisih-mundur

- polinom interpolasi: Newton-Gregory mundur
- bila digunakan titik-titik x_0 dan x_{-1} :

$$f'(x_0) = 1/h\ (\nabla f_0) = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} \qquad \text{(P.7.14)}$$

(c) Hampiran selisih-pusat

- digunakan tiga titik x_0 , x_1 , dan x_2 :

$$f'(x_0) = 1/h\ (\Delta f_0 + (s - 1/2)\ \Delta^2 f_0)$$

untuk titik $x_1 \rightarrow s = (x_1 - x_0)/h = h/h = 1$, sehingga

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= 1/h\ (\Delta f_0 + 1/2\Delta^2 f_0) \\ &= 1/h\ (\Delta f_0 + 1/2(\Delta f_1 - \Delta f_0)) \\ &= 1/h\ (1/2\ \Delta f_0 + 1/2\ \Delta f_1) \\ &= 1/2h\ (f_1 - f_0 + f_2 - f_1) \end{aligned}$$

$$= \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

untuk titik x_{-1} , x_0 , dan x_1 :

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \qquad \text{(P.7.15)}$$

Rumus untuk Turunan Kedua, *f* "(*x*), dengan Polinom Interpolasi

Turunan kedua *f* adalah

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{ds}{dx}$$

$$= 1/h\ (0 + \Delta^2 f_0 + (s - 1)\ \Delta^3 f_0\ )\ .\ 1/h$$

$$= 1/h^2\ (\Delta^2 f_0 + (\ s - 1)\ \Delta^3 f_0\ )$$

Misalkan untuk hampiran selisih-pusat, titik-titik yang digunakan x_0 , x_1 , dan x_2 :

- pada titik $x_1 \rightarrow s = (x_1 - x_0)/h = h/h = 1$, sehingga

$$f''(x_1) = 1/h^2\ (\Delta^2 f_0 + (1 - 1)\ \Delta^3 f_0\ )$$

$$= 1/h^2\ (\Delta^2 f_0\ )$$

$$= 1/h^2\ (\Delta f_1 - \Delta f_0)$$

$$= 1/h^2\ (\ f_2 - f_1 + f_1 + f_0\ )$$

$$= 1/h^2\ (\ f_0 - 2f_1 + f_2\ )$$

- untuk titik x_{-1} , x_0 , dan x_1 :

$$f''(x_0) = \frac{f_{-1} - 2 f_0 + f_1}{h^2} \qquad \text{(P.7.16)}$$

7.5 Menentukan Orde Galat

Pada penurunan rumus turunan numerik dengan deret Taylor, kita dapat langsung memperoleh rumus galatnya. Tetapi dengan polinom interpolasi kita harus mencari rumus galat tersebut dengan bantuan deret Taylor.

Contohnya, kita menentukan rumus galat dan orde dari rumus turunan numerik hampirin selisih-pusat:

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + E$$

Nyatakan E (galat) sebagai ruas kiri persamaan, lalu ekspansi ruas kanan dengan deret Taylor di sekitar x_0:

$$\begin{aligned}
E &= f'(x_0) - (f_1 - f_{-1})/2h \\
&= f_0' - 1/2h\,[\,(f_0 + hf_0' + h^2/2\, f_0'' + h^3/6\, f_0''' + \ldots) \\
&\quad - (f_0 - hf_0' + h^2/2\, f_0'' - h^3/6\, f_0''' + \ldots)\,] \\
&= f_0' - 1/2h\,(2hf_0' + h^3/3\, f_0''' + \ldots) \\
&= f_0' - f_0' - h^2/6\, f_0''' + \ldots \\
&= -h^2/6\, f_0''' + \ldots \\
&= -h^2/6\, f'''(t), \quad x_{-1} < t < x_1 \qquad \text{(P.7.17)} \\
&= O(h^2)
\end{aligned}$$

Jadi, hampiran selisih-pusat memiliki galat $E = -h^2/6\, f'''(t)$, $x_{-1} < t < x_1$, dengan orde $O(h^2)$.

7.6 Program Menghitung Turunan

Program menghitung turunan numerik sangat sederhana. Rumus-rumus turunan dinyatakan sebagai fungsi. Di bawah ini tiga buah fungsi menghitung turunan pertama dengan rumus hampiran selisih-maju, hampiran selisih mundur, dan hampiran selisih-pusat.

Program 7.1 Menghitung turunan pertama dengan rumus hampiran selisih-maju, hampiran selisih-mundur, dan hampiran selisih-pusat.

```
function fAksen_maju(f0, f1, h : real):real;
{ Menghitung f'(x0) dengan rumus hampiran selisih-maju }
begin
   fAksen_maju:=(f1-f0)/h;
end;


function fAksen_mundur(f_1, f0, h : real):real;
{ Menghitung f'(x0) dengan rumus hampiran selisih-mundur }
begin
   fAksen_mundur:=(f0-f_1)/h;
end;


function fAksen_pusat(f_1, f1, h : real):real;
{ Menghitung f'(x0) dengan rumus hampiran selisih-pusat }
begin
   fAksen_pusat:=(f1-f_1)/(2*h);
end;
```

7.7 Ringkasan Rumus-Rumus Turunan

Di bawah ini dirangkum beberapa rumus perhitungan turunan secara numerik, baik untuk turunan pertama, turunan kedua, dan seterusnya. Disertakan juga orde dari setiap rumus, dalam notasi *O*-besar. Rumus turunan dengan orde yang semakin tinggi menunjukkan nilai turunannya semakin teliti, namun jumlah komputasinya makin banyak (jumlah titik data yang diperlukan juga lebih banyak).

1. Rumus untuk turunan pertama

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h) \qquad \text{(selisih-mundur)}$$

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

$$f_0' = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0' = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

2. Rumus untuk turunan kedua

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

$$f_0'' = \frac{f_{-2} - 2f_{-1} + f_0}{h^2} + O(h) \qquad \text{(selisih-mundur)}$$

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0'' = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{12h} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0'' = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

3. Rumus untuk turunan ketiga

$$f_0''' = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{h^3} + O(h) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0''' = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

4. Rumus untuk turunan keempat

$$f_0^{(iv)} = \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4} + O(h) \qquad \text{(selisih-maju)}$$

$$f_0^{(iv)} = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4} + O(h^2) \qquad \text{(selisih-pusat)}$$

7.8 Contoh Perhitungan Turunan

Contoh 7.1

Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut :

x	$f(x)$
1.3	3.669
1.5	4.482
1.7	5.474
1.9	6.686
2.1	8.166
2.3	9.974
2.5	12.182

(a) Hitunglah $f'(1.7)$ dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$ dan $O(h^4)$
(b) Hitunglah $f'(1.4)$dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$
(c) Rumus apa yang digunakan untuk menghitung $f'(1.3)$ dan $f'(2.5)$?

Penyelesaian:

(a) Orde $O(h^2)$:

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

Ambil titik-titik $x_{-1} = 1.5$ dan $x_1 = 1.9$, yang dalam hal ini $x_0 = 1.7$ terletak di tengah keduanya dengan $h = 0.2$.

$$f'(1.7) = \frac{6.686 - 4.482}{2(0.2)} = 5.510 \qquad \text{(empat angka bena)}$$

Orde $O(h^4)$:

$$f_0' = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_2}{12h}$$

Ambil titik-titik x_{-2} = 1.3 dan x_{-1} = 1.5 , x_1 = 1.9, dan x_2 = 2.1, yang dalam hal ini x_0 = 1.7 terletak di pertengahannya.

$$f'(1.7) = \frac{-8.166 + 8(6.686) - 8(4.482) + 3.669}{12(0.2)}$$

$$= 5.473 \qquad \text{(4 angka bena)}$$

(b) Orde $O(h^2)$:

Ambil titik-titik x_{-1} = 1.3 dan x_1 = 1.5, yang dalam hal ini x_0 = 1.4 terletak di tengahnya dan h = 0.1.

$$f'(1.4) = \frac{4.482 - 3.669}{2(0.1)} = 4.065 \qquad \text{(4 angka bena)}$$

(c) Untuk menghitung f '(1.3) digunakan rumus hampiran selisih-maju, sebab x = 1.3 hanya mempunyai titik-titik sesudahnya (maju), tetapi tidak memiliki titik-titik sebelumnya. Sebaliknya, untuk menghitung nilai f '(2.5) digunakan rumus hampiran selisih-mundur, sebab x = 2.5 hanya mempunyai titik-titik sebelumnya (mundur).

Hampiran selisih-maju :

$$f_0' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)$$

$$f'(1.3) = \frac{4.482 - 3.669}{0.2} = 4.065$$

Hampiran selisih-mundur :

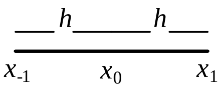
$$f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)$$

$$f'(2.5) = \frac{12.182 - 9.974}{0.2} = 11.04$$

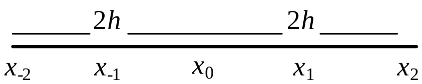
■

7.9 Ekstrapolasi Richardson

Ekstrapolasi Richardson juga dapat diterapkan pada turunan numerik untuk memperoleh solusi yang lebih teliti. Misalkan $D(h)$ dan $D(2h)$ adalah hampiran $f'(x_0)$ dengan mengambil titik-titik masing-masing sejarak h dan $2h$. Misalkan untuk menghitung $f'(x_0)$ digunakan rumus hampiran beda- pusat orde $O(h^2)$:



$$
\begin{aligned}
D(h) &= 1/2h\ (f_1 - f_{-1}) + O(h^2) \\
&= f_0' + Ch^2 + \ldots \qquad \text{(P.7.18)}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
D(2h) &= \frac{1}{2(2h)}\ (f_2 - f_{-2}) + O((2h)^2) \\
&= f_0' + C(2h)^2 + \ldots \\
&= f_0' + 4Ch^2 + \ldots \qquad \text{(P.7.19)}
\end{aligned}
$$

Kurangi persamaan (P.7.18) dengan persamaan (P.7.19), menghasilkan :

$$D(h) - D(2h) = -3Ch^2$$

dari sini,

$$C = \frac{D(h) - D(2h)}{-3h^2} \qquad \text{(P.7.20)}$$

Sulihkan (P.7.20) ke dalam persamaan (P.7.18) :

$$
\begin{aligned}
D(h) &= f_0' + \frac{[D(h) - D(2h)]h^2}{-3h^2} \\
&= f_0' - 1/3\ [\ D(h) - \mathrm{D(2h)}\ ]
\end{aligned}
$$

atau

$$f_0' = D(h) + 1/3\ [\ D(h) - D(2h)\ ] \qquad \text{(P.7.21)}$$

Ekstrapolasi Richardson dapat diperluas penggunaannya untuk mendapatkan nilai turunan fungsi yang lebih baik (*improve*). Berdasarkan persamaan (P.7.21) di atas dapat ditulis aturan:

$$f_0' = D(h) + \frac{1}{2^n - 1}[D(h) - D(2h)] \qquad \text{(P.7.22)}$$

yang dalam hal ini n adalah orde galat rumus yang dipakai. Misalnya digunakan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$ dalam menghitung $D(h)$ dan $D(2h)$, maka n = 2, sehingga rumus ekstrapolasi Richardsonnya adalah seperti pada persamaan (P.7.21).

Catat juga bahwa setiap perluasan ekstrapolasi Richardson akan menaikkan orde galat dari $O(h^n)$ menjadi $O(h^{n+2})$ (lihat bahasan esktrapolasi Richardson pada Bab Integrasi Numerik).

Contoh 7.2

Diberikan data dalam bentuk tabel sebagai berikut :

x	$f(x)$
2.0	0.42298
2.1	0.40051
2.2	0.37507
2.3	0.34718
2.4	0..31729
2.5	0.28587
2.6	0.25337
2.7	0.22008
2.8	0.18649
2.9	0.15290
3.0	0.11963

Tentukan f '(2.5) dengan ekstrapolasi Ricahrdson bila $D(h)$ dan $D(2h)$ dihitung dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$ sampai 5 angka bena.

Penyelesaian:

$D(h)$ $\rightarrow$ selang titik yang dipakai: [2.4 , 2.6] dan h = 0.1

x_{-1} = 2.4, x_0 = 2.5, x_1 = 2.6

$$D(h) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} = \frac{(0.25337 - 0.31729)}{2(0.1)} = -0.31960$$

$D(2h)$ $\rightarrow$ selang titik yang dipakai: [2.3 , 2.7] dan h = 0.2

$x_{-2} = 2.3$, $x_0 = 2.5$, $x_2 = 2.7$

$$D(2h) = \frac{f_2 - f_{-2}}{2h} = \frac{(0.22008 - 0.34718)}{2(0.2)} = -0.31775$$

$D(4h)$ $\rightarrow$ selang titik yang dipakai: [2.1 , 2.9] dan $h = 0.4$

$x_{-4} = 2.1$, $x_0 = 2.5$, $x_4 = 2.9$

$$D(4h) = \frac{f_4 - f_{-4}}{2h} = \frac{(0.40051 - 0.15290)}{2(0.4)} = -0.30951$$

$D(h) = -0.31960$ dan $D(2h) = -0.31775$ keduanya dihitung dengan rumus orde $O(h^2)$, maka $n = 2$, sehingga

$$\begin{aligned} f'(2.5) &= f_0' = D(h) + 1/(2^2 - 1)\ [\ D(h) - D(2h)\ ] \\ &= -0.31960 + 1/3\ (-0.31960 + 0.31775) \\ &= -0.32022 \rightarrow \text{mempunyai galat orde } O(h^4) \end{aligned}$$

$D(2h) = -0.31775$ dan $D(4h) = -0.30951$ keduanya dihitung dengan rumus orde $O(h^2)$, maka $n = 2$, sehingga

$$\begin{aligned} f'(2.5) &= f_0' = D(2h) + 1/(2^2 - 1)\ [\ D(2h) - D(4h)\ ] \\ &= -0.31775 + 1/3\ (-0.31775 + 0.30951) \\ &= -0.32050 \rightarrow \text{mempunyai galat orde } O(h^4) \end{aligned}$$

$D(2h) = -0.32022$ dan $D(4h) = -0.32050$ mempunyai galat orde $O(h^4)$, maka $n = 4$, sehingga

$$\begin{aligned} f'(2.5) &= f_0' = D(2h) + 1/(2^4 - 1)\ [\ D(2h) - D(4h)\ ] \\ &= -0.32022 + 1/15\ (-0.32022 + 0.32050) \\ &= -0.32020 \rightarrow \text{mempunyai galat orde } O(h^6) \end{aligned}$$

Tabel Richardson :

h	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$
0.1	-0.31960		
0.2	-0.31775	-0.32022	
0.4	-0.30951	-0.32050	-0.32020

Jadi, $f'(2.5) = -0.32020$. ■

7.10 Terapan Turunan Numerik dalam Bidang Pengolahan Citra

Citra (*image*) merupakan kumpulan elemen gambar (*picture element* = *pixel*) yang secara keseluruhan merekam suatu adegan (*scene*) melalui pengindera visual (kamera) [DUL96]. Citra intensitas ialah citra yang setiap *pixel* merekam intensitas cahaya yang dipantulkan dari setiap titik di objek, misalnya citra biner, *graylevel*, berwarna, dan banyak-alur (*multi-channel*). Untuk kebutuhan pengolahan dengan komputer, citra disajikan dalam bentuk diskrit yang disebut citra digital. Citra digital dapat disajikan oleh matriks f yang berukuran $M \times N$ dengan bentuk:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{M1} & f_{M2} & \cdots & f_{MN} \end{bmatrix} \qquad \text{(P.7.22)}$$

Tiap elemen matriks adalah bilangan bulat dalam rentang [0..255] untuk citra 8 bit.

Salah satu proses yang terdapat dalam pengolahan citra ialah pendeteksian tepi. Tepi merupakan *feature* yang penting pada suatu citra. Tepi didefinisikan sebagai perubahan intensitas yang besar dalam jarak yang singkat. Perbedaan intensitas inilah yang menampakkan rincian pada gambar. Tepi biasanya terdapat pada batas antara dua daerah berbeda pada suatu citra. Tepi memberikan informasi batas-batas objek dengan lingkungannya atau dengan objek yang lain, *feature* untuk mengidentifikasi objek, dan untuk terapan penapisan citra.

Pendeteksian tepi merupakan langkah pertama untuk melingkupi informasi di dalam citra. Tepi mencirikan batas-batas objek dan karena itu tepi berguna untuk proses segmentasi dan identifikasi objek di dalam citra. Tujuan operasi pendeteksian tepi adalah untuk meningkatkan penampakan garis batas suatu daerah atau objek di dalam citra.

Salah satu pendekatamyang dipakai dalam pendeteksian sisi adalah dengan kemiringan diferensial (*differential gradient*). Secara matematis perubahan intensitas yang besar dalam jarak yang sangat singkat dapat dipandang sebagai suatu fungsi yang memiliki kemiringan yang besar. Pengukuran kemiringan suatu fungsi dilakukan dengan menghitung turunan pertamanya. Dalam citra digital, pendeteksian tepi dapat dilakukan dengan cara yang mirip, yaitu dengan turunan pertamanya secara parsial dalam ruang diskrit:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \qquad \text{(P.7.23)}$$

yang dalam hal ini kedua turunan parsial didefinisikan sebagai

$$D_1(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad \text{(P.7.24)}$$

$$D_1(y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad \text{(P.7.25)}$$

Biasanya $\Delta x = \Delta y = 1$, sehingga persamaan turunan pertama menjadi:

$$D_1(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f(x+1, y) - f(x, y)$$

$$D_1(y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f(x, y+1) - f(x, y)$$

Kekuatan tepi pada setiap *pixel* citra dihitung dengan rumus:

$$G[f(x,y)] = |\ f_x^{\,2}| + |\ f_y^{\,2}| \qquad \text{(P.7.26)}$$

atau dengan rumus

$$G[f(x,y)] = \max\ (\ f_x^{\,2}|\ ,\ |\ f_y^{\,2}|) \qquad \text{(P.7.27)}$$

Suatu *pixel* dianggap sebagai *pixel* sisi jika kekuatan tepinya di atas nilai ambang (*threshold*) tertentu.

$D_1(x)$ dan $D_1(y)$ merupakan hampiran selisih-maju. Hampiran lain yang dipakai adalah hampiran selisih-pusat, yaitu:

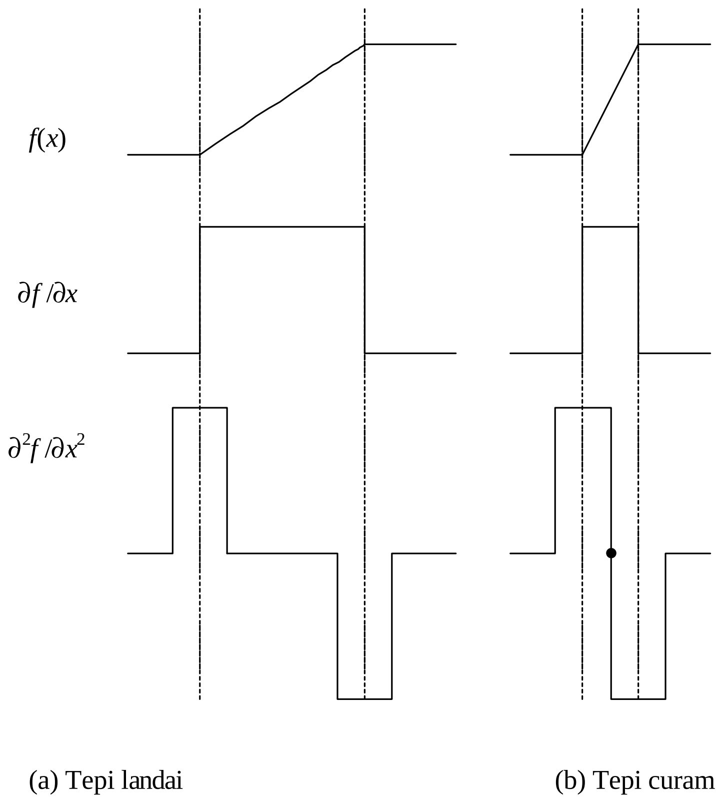
$$D_2(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} \qquad \text{(P.7.28)}$$

$$D_2(y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} \qquad \text{(P.7.29)}$$

Gambar 7.2 adalah contoh hasil deteksi semua tepi citra Lena, citra *Camera*, dan citra botol.

Gambar 7.2 Deteksi semua tepi citra Lena, *camera*, dan botol

Operator lain yang digunakan untuk mendeteksi sisi adalah yang berdasarkan pada operasi turunan kedua (Gambar 7.3), yang dikenal dengan operator Laplace (*Laplacian*). Operator Laplace mendeteksi lokasi tepi lebih akurat khususnya pada tepi yang curam.



Gambar 7.3 Operator Laplace

Pada Gambar 7.3, kurva pada baris pertama menunjukkan perubahan intensitas suatu tepi. Baris kedua adalah turunan pertamanya, dan baris ketiga adalah turunan keduanya. Kolom kiri (a) adalah untuk sisi yang landai sedangkan kolom (b) untuk sisi yang curam. Dari Gambar 7.3 terlihat juga bahwa turunan kedua dari tepi yang landai tidak terdapat persilangan-nol (*zerro crossing*), sedangkan pada tepi yang curam terdapat persilangan-nol yang ditandai dengan titik (•). Persilangan-nol ialah titik perubahan dari nilai positif ke negatif atau sebaliknya.

Jika digunakan hampiran selisih-maju, maka operator Laplace diturunkan sebagai berikut:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= D_1(D_1(x)) + D_1(\ D_1(\ y))$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\ D_1\,(\ f(x + \Delta x, y) - D_1(\ f(x,y)) + \frac{1}{\Delta y}\ D_1(\ f(x, y + \Delta y) -$$

$$D_1(\ f(x, y))$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f(x+\Delta x+\Delta x, y) - f(x+\Delta x, y)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right\} +$$

$$\frac{1}{\Delta y}\left\{\frac{f(x, y+\Delta y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta y} - \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right\}$$

$$= \frac{f(x+2\Delta x, y) - 2f(x+\Delta x, y) + f(x, y)}{(\Delta x)^2} +$$

$$\frac{f(x, y+2\Delta y) - 2f(x, y+\Delta y) + f(x, y)}{(\Delta y)^2} \qquad \text{(P.7.30)}$$

Biasanya, $\Delta x = \Delta x = 1$ sehingga bentuk (P.7.30) menjadi lebih sederhana. Gambar 7.4 memperlihatkan hasil pendeteksian tepi pada citra botol dengan operator Laplace.

(a) (b)

Gambar 7.4 (a) citra botol; (b) hasil pendeteksian tepi dengan operator Laplace

Tidak ada hal besar yang terjadi dengan tiba-tiba, bahkan yang lebih banyak
daripada setangkai anggur atau sebutir buah ara sekalipun.
Perlu waktu. Mula-mula ia berbunga, kemudian menjadi buah,
dan akhirnya matang.
(Epictetus)

Soal Latihan

1. Jika $x_0 - h$, x_0, $x_0 + h \in [a,b]$, perlihatkanlah

$$f_0'' = \frac{1}{h^2} (f_1 - 2f_0 + f_{-1}) + E$$

dan

$$E = - \frac{12}{h^2} h^2 f_0^{(iv)} + ...$$

2. Jika f adalah polinom derajat tiga dan

$$f_0' = a_{-2} f_{-2} + a_{-1} f_{-1} + a_1 f_1 + a_2 f_2 + E$$

tentukan nilai-nilai tetapan a_{-2}, a_{-1}, a_1, dan a_2. Perlihatkan juga bahwa

$$E = \frac{1}{30} h^4 f_0^{(v)} + ...$$

3. Diberikan tabel yang berisi titik-titik sebuah fungsi f :

x	$f(x)$
1.000	0.54030
1.100	0.45360
1.198	0.36422
1.199	0.36329
1.200	0.36236
1.201	0.36143
1.202	0.36049
1.300	0.26750
1.400	0.16997

(a) Tentukan nilai $f'(1.2)$ dan $f''(1.2)$ untuk $h = 0.1$ dan $h = 0.001$ dengan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^2)$.

(b) Tabel di atas adalah tabel $f(x) = \cos(x)$. Bandingkan jawaban yang anda peroleh dengan nilai sejatinya.

4. Misalkan $f_{1/2}' = f'(x_0 + h/2)$ adalah hampiran nilai turunan dengan rumus selisih-pusat orde $O(h^2)$:

$$f_{1/2}' = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h^2)$$

(a) Perlihatkan bahwa galat pemotongan rumus tersebut adalah

$$-\frac{1}{24} h^2 f_0''' + \ldots$$

(b) Hitung $f'(1.5)$ jika diketahui hanya titik-titik berikut:

(1.2, 0.8333), (1.4, 0.7143), (1.6, 0.6250), dan (1.8, 0.5556)

Gunakan empat angka bena.

5. Misalkan $D(2h)$ dan $D(4h)$ adalah hampiran $f'(x_0)$ dengan lebar selang $2h$ dan $4h$ menggunakan rumus hampiran selisih-pusat orde $O(h^4)$. Turunkan rumus ektrapolasi Richardson untuk menghitung perkiraan $f'(x_0)$ yang lebih baik adalah:

$$f'(x_0) = D(2h) + \frac{[D(2h) - D(4h)]}{15}$$

Kemudian tentukan hampiran $f'(1.2)$ jika diketahui fungsinya $f(x) = e^x$ dalam selang [0.8, 1.6] dengan $h = 0.1$.