Bab 6

Integrasi Numerik

Pelajarilah jagad raya ini. Jangan kecewa karena dunia
tidak mengenal anda, tetapi kecewalah karena
anda tidak mengenal dunia.
(Kong Fu Tse - filusuf China)

Di dalam kalkulus, integral adalah satu dari dua pokok bahasan yang mendasar disamping turunan (*derivative*). Dalam kuliah kalkulus integral, anda telah diajarkan cara memperoleh solusi analitik (dan eksak) dari **integral Tak-tentu** maupun **integral Tentu**. Integral Tak-tentu dinyatakan sebagai

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \text{(P.6.1)}$$

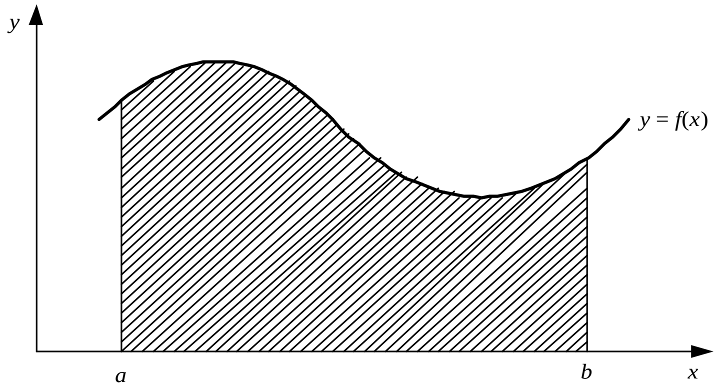
Solusinya, $F(x)$, adalah fungsi menerus sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$, dan C adalah sebuah konstanta. Integral Tentu menangani perhitungan integral di antara batas-batas yang telah ditentukan, yang dinyatakan sebagai

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{(P.6.2)}$$

Menurut teorema dasar kalkulus integral, persamaan (P.6.2) dihitung sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Secara geometri, integrasi Tentu sama dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $x = a$ dan garis $x = b$ (Gambar 6.1). Daerah yang dimaksud ditunjukkan oleh bagian yang diarsir.



Gambar 6.1 Tafsiran geometri integral Tentu

Fungsi-fungsi yang dapat diintegrasikan dapat dikelompokkan sebagai

1. Fungsi menerus yang sederhana, seperti polinomial, eksponensial, atau fungsi trigonometri. Misalnya,

$$\int_0^2 (6x^3 - x^2 + \cos(x) - e^x)dx$$

   Fungsi sederhana seperti ini mudah dihitung integralnya secara eksak dengan menggunakan metode analitik. Metode-metode analitik untuk menghitung integral fungsi yang demikian sudah tersedia, yaitu

$\int ax^n\, dx = ax^{n+1}/(n+1) + C$

$\int e^{ax}\, dx = e^{ax}/a + C$

$\int \sin(ax+b)\, dx = -1/a \cos(ax+b) + C$

$\int \cos(ax+b)\, dx = 1/a \sin(ax+b) + C$

$\int dx/x = \ln|x| + C$

$\int \ln|x|\, dx = x \ln|x| - x + C$

2. Fungsi menerus yang rumit, misalnya

$$\int_0^2 \frac{2+\cos\left(1+x^{3/2}\right)}{\sqrt{1+0.5\sin x}}\, e^{0.5x} dx$$

Fungsi yang rumit seperti ini jelas sulit, bahkan tidak mungkin, diselesaikan dengan metode-metode integrasi yang sederhana. Karena itu, solusinya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

3. Fungsi yang ditabulasikan, yang dalam hal ini nilai x dan $f(x)$ diberikan dalam sejumlah titik diskrit. Fungsi seperti ini sering dijumpai pada data hasil eksperimen di laboratorium atau berupa data pengamatan di lapangan. Pada kasus terakhir ini, umumnya fungsi $f(x)$ tidak diketahui secara eksplisit. Yang dapat diukur hanyalah besaran fisisnya saja. Misalnya,

x	$f(x)$
0.00	6.0
0.25	7.5
0.50	8.0
0.75	9.0
1.00	8.5

Integrasi fungsi seperti ini jelas harus didikerjakan secara numerik.

6.1 Terapan Integral dalam Bidang Sains dan Rekayasa

Integral mempunyai banyak terapan dalam bidang sains dan rekayasa. Dalam praktek rekayasa, seringkali fungsi yang diintegrasikan (*integrand*) adalah fungsi empirik yang diberikan dalam bentuk tabel, atau *integrand*-nya tidak dalam bentuk fungsi elementer (seperti sinh x, fungsi Gamma $G(a)$, dsb), atau fungsi eksplisit f yang terlalu rumit untuk diintegralkan [KRE88]. Oleh sebab itu, metode numerik dapat digunakan untuk menghampiri integrasi.

Di bawah ini diberikan beberapa contoh persoalan dalam bidang sains dan rekayasa.

1. Dalam bidang fisika, integral digunakan untuk menghitung persamaan kecepatan. Misalkan kecepatan sebuah partikel merupakan fungsi waktu menerus yang diketahui terhadap waktu, $v(t)$. Jarak total d yang ditempuh oleh partikel ini selama waktu t diberikan oleh:

$$d = \int_0^t v(t)dt$$

2. Dalam bidang teknik elektro/kelistrikan, telah diketahui bahwa harga rata-rata suatu arus listrik yang berosilasi sepanjang satu periode boleh nol. Disamping kenyataan bahwa hasil netto adalah nol, arus tersebut mampu menimbulkan kerja dan menghasilkan panas. Karena itu para rekayasawan listrik sering mencirikan arus yang demikian dengan persamaan

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_0^T i^2(t)dt}{T}}$$

yang dalam hal ini I_{RMS} adalah arus *RMS* (*root-mean-square*), T adalah periode, dan $i(t)$ adalah arus pada rangkaian, misalnya

$$\begin{aligned} i(t) &= 5e^{-2t}\sin 2\pi t && \text{untuk } 0 \le t \le T/2 \\ &= 0 && \text{untuk } T/2 \le t \le T \end{aligned}$$

3. Contoh fungsi dalam bentuk tabel adalah pengukuran fluks panas matahari yang diberikan oleh tabel berikut:

Waktu, jam	Fluks panas q, kalori/cm/jam
0	0.1
1	1.62
2	5.32
3	6.29
4	7.8
5	8.81
6	8.00
7	8.57
8	8.03
9	7.04
10	6.27
11	5.56
12	3.54
13	1.0
14	0.2

Data yang ditabulasikan pada tabel ini memberikan pengukuran fluks panas q setiap jam pada permukaan sebuah kolektor sinar matahari. Diminta memperkiraan panas total yang diserap oleh panel kolektor seluas 150.000 cm^2 selama waktu 14 jam. Panel mempunyai kemangkusan penyerapan (*absorption*), e_{ab}, sebesar 45%. Panas total yang diserap diberikan oleh persamaan

$$H = e_{ab} \int_0^t qA\,dt$$

Demikianlah beberapa contoh terapan integral dalam bidang sains dan rekayasa. Umumnya fungsi yang diintegralkan bentuknya rumit sehingga sukar diselesaikan secara analitik. Karena itu, perhitungan integral secara numerik lebih banyak dipraktekkan oleh para insinyur.

6.2 Persoalan Integrasi Numerik

Persoalan integrasi numerik ialah menghitung secara numerik integral Tentu

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

yang dalam hal ini a dan b batas-batas integrasi, f adalah fungsi yang dapat diberikan secara eksplisit dalam bentuk persamaan ataupun secara empirik dalam bentuk tabel nilai.

Terdapat tiga pendekatan dalam menurunkan rumus integrasi numerik. Pendekatan pertama adalah berdasarkan tafsiran geometri integral Tentu. Daerah integrasi dibagi atas sejumlah pias (*strip*) yang berbentuk segiempat. Luas daerah integrasi dihampiri dengan luas seluruh pias. Rumus, dalam bab ini disebut kaidah, integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan ke dalam **metode pias**.

Pendekatan kedua adalah berdasarkan polinom interpolasi. Di sini fungsi *integrand* $f(x)$ dihampiri dengan polinom interpolasi $p_n(x)$. Selanjutnya, integrasi dilakukan terhadap $p_n(x)$ karena polinom lebih mudah diintegralkan ketimbang mengintegralkan $f(x)$. Rumus integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan ke dalam **metode Newton-Cotes**, yaitu metode yang umum untuk menurunkan rumus integarsi numerik..

Pendekatan ketiga sama sekali tidak menggunakan titik-titik diskrit sebagaimana pada kedua pendekatan di atas. Nilai integral diperoleh dengan mengevaluasi nilai fungsi pada sejumlah titik tertentu di dalam selang [-1, 1], mengalikannya dengan suatu konstanta, kemudian menjumlahkan keseluruhan perhitungan. Pendekatan ketiga ini dinamakan **Kuadratur Gauss**, yang akan dibahas pada bagian akhir bab ini.

6.3 Metode Pias

Pada umumnya, metode perhitungan integral secara numerik bekerja dengan sejumlah titik diskrit. Karena data yang ditabulasikan sudah berbentuk demikian, maka secara alami ia sesuai dengan kebanyakan metode integrasi numerik. Untuk fungsi menerus, titik-titik diskrit itu diperoleh dengan menggunakan persamaan fungsi yang diberikan untuk menghasilkan tabel nilai.

Dihubungkan dengan tafsiran geometri inttegral Tentu, titik-titik pada tabel sama dengan membagi selang integrasi $[a, b]$ menjadi n buah pias (*strip*) atau segmen (Gambar 6.2). Lebar tiap pias adalah

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{P.6.3}$$

Titik absis pias dinyatakan sebagai

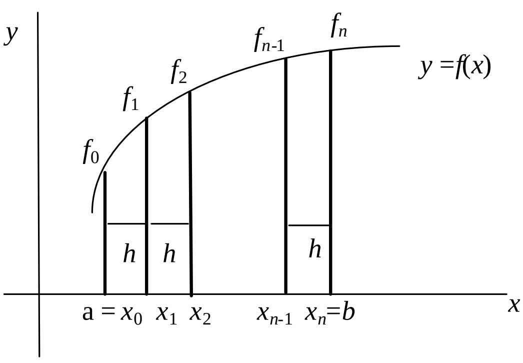
$$x_r = a + rh, \qquad r = 0, 1, 2, ..., n \tag{P.6.4}$$

dan nilai fungsi pada titik absis pias adalah

$$f_r = f(x_r) \tag{P.6.5}$$

Luas daerah integrasi $[a, b]$ dihampiri sebagai luas n buah pias. Metode integrasi numerik yang berbasis pias ini disebut metode pias. Ada juga buku yang menyebutnya **metode kuadratur**, karena pias berbentuk segiempat.

r	x_r	f_r
0	x_0	f_0
1	x_1	f_1
2	x_2	f_2
3	x_3	f_3
4	x_4	f_4
...	...	...
n-2	x_{n-2}	f_{n-2}
n-1	x_{n-1}	f_{n-1}
n	x_n	f_n



Gambar 6.2 Metode pias

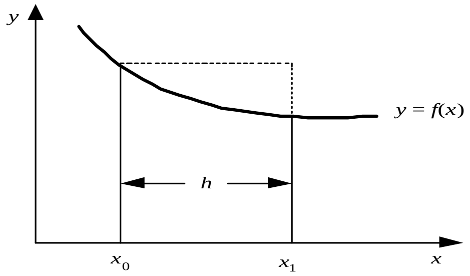
Kaidah integrasi numerik yang dapat diturunkan dengan metode pias adalah:

1. Kaidah segiempat (*rectangle rule*)
2. Kaidah trapesium (*trapezoidal rule*)
3. Kaidah titik tengah (*midpoint rule*)

Dua kaidah pertama pada hakekatnya sama, hanya cara penurunan rumusnya yang berbeda, sedangkan kaidah yang ketiga, kaidah titik tengah, merupakan bentuk kompromi untuk memperoleh nilai hampiran yang lebih baik.

6.3.1 Kaidah Segiempat

Pandang sebuah pias berbentuk empat persegi panjang dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ berikut (Gambar 6.3).



Gambar 6.3 Kaidah segiempat

Luas satu pias adalah (tinggi pias = $f(x_0)$)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h\, f(x_0) \qquad \text{(P.6.6)}$$

atau (tinggi pias = $f(x_1)$)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h\, f(x_1) \qquad \text{(P.6.7)}$$

Jadi,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx hf(x_1) \qquad +$$

$$2\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h\,[\,f(x_0) + f(x_1)]$$

Bagi setiap ruas persamaan hasil penjumlahan di atas dengan 2, untuk menghasilkan

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_1)] \tag{P.6.8}$$

Persamaan (P.6.8) ini dinamakan **kaidah segiempat**. Kaidah segiempat untuk satu pias dapat kita perluas untuk menghitung

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

yang dalam hal ini, I sama dengan luas daerah integrasi dalam selang $[a, b]$. Luas daerah tersebut diperoleh dengan membagi selang $[a, b]$ menjadi n buah pias segiempat dengan lebar h, yaitu pias dengan absis $[x_0 , x_1]$, $[x_1 , x_2]$, $[x_2 , x_3]$, ... , dan pias $[x_{n-1} , x_n]$. Jumlah luas seluruh pias segiempat itu adalah hampiran luas I (Gambar 6.4). Kaidah integrasi yang diperoleh adalah **kaidah segiempat gabungan** (*composite rectangle's rule*):

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + ... + hf(x_{n-1})$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_1) + hf(x_2) + hf(x_3) + ... + hf(x_n) \qquad +$$

$$2\int_a^b f(x)dx \approx hf(x_0) + 2hf(x_1) + 2hf(x_2) + \ldots + 2hf(x_{n-1}) + hf(x_n)$$

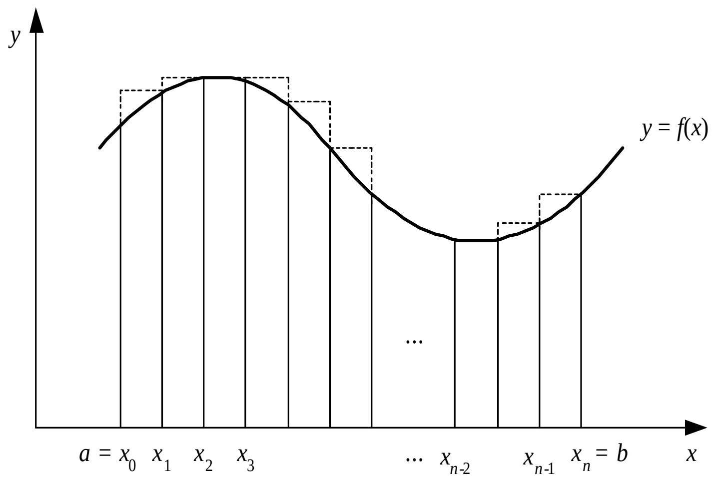
Bagi setiap ruas persamaan hasil penjumlahan di atas dengan 2, untuk menghasilkan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} f(x_0) + hf(x_1) + hf(x_2) + ... + hf(x_{n-1}) + \frac{h}{2} f(x_n)$$

Jadi, kaidah segiempat gabungan adalah

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-1} + f_n) = \frac{h}{2}(f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) \qquad \text{(P.6.9)}$$

dengan $f_r = f(x_r)$, $r = 0, 1, 2, ..., n$.



Gambar 6.4 Kaidah segiempat gabungan

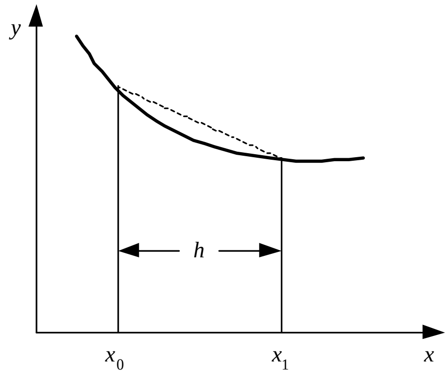
6.3.2 Kaidah Trapesium

Pandang sebuah pias berbentuk trapesium dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ berikut (Gambar 6.5):

Luas satu trapesium adalah

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_0)] \qquad \text{(P.6.10)}$$

Persamaan (P.6.10) ini dikenal dengan nama **kaidah trapesium**. Catatlah bahwa kaidah trapesium sama dengan kaidah segiempat.



Gambar 6.5 Kaidah trapesium

Bila selang [*a*, *b*] dibagi atas *n* buah pias trapesium, kaidah integrasi yang diperoleh adalah **kaidah trapesium gabungan** (*composite trapezoidal's rule*):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{2}\,[\,f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}\,[\,f(x_1) + f(x_2)] + \ldots + \frac{h}{2}\,[\,f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\approx \frac{h}{2}\,[\,f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\approx \frac{h}{2}\,(\,f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_1 + f_n) \qquad \text{(P.6.11)}$$

dengan $f_r = f(x_r)$, $r = 0, 1, 2, ..., n$.

Program 6.1 Kaidah Trapesium

```
procedure trapesium(a, b : real; n: integer; var I : real);
{ Menghitung integrasi f(x) di dalam selang [a, b] dan jumlas pias
  adalah n dengan menggunakan kaidah trapesium.
  K.Awal : nilai a, b, dan n sudah terdefinisi
  K.Akhir: I adalah hampiran integrasi yang dihitung dengan kaidah
           segi-empat.
}
var
   h, x, sigma: real;
   r : integer;
begin
   h:=(b-a)/n;         {lebar pias}
   x:=a;               {awal selang integrasi}
   I:=f(a) + f(b);
   sigma:=0;
   for r:=1 to n-1 do
    begin
        x:=x+h;
        sigma:=sigma + 2*f(x);
    end;
   I:=(I+sigma)*h/2;   { nilai integrasi numerik}
end;
```

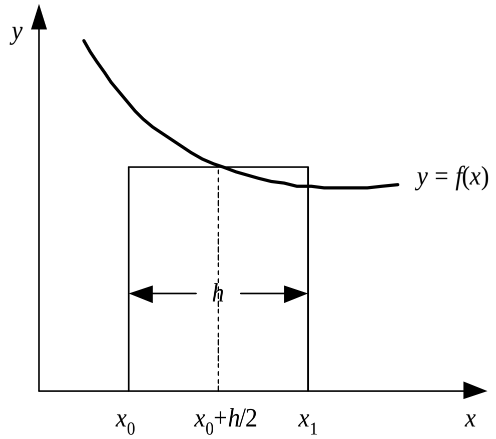
6.3.3 Kaidah Titik Tengah

Pandang sebuah pias berbentuk empat persegi panjang dari $x = x_0$ sampai $x = x_1$ dan titik tengah absis $x = x_0 + h/2$ (Gambar 6.6).

Luas satu pias adalah

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h\, f(x_0 + h/2) \approx h\, f(x_{1/2}) \qquad \text{P.6.12)}$$

Persamaan (P.6.12) ini dikenal dengan nama **kaidah titik-tengah.**



Gambar 6.6 Kaidah titik tengah

Kaidah titik-tengah gabungan adalah (Gambar 6.7):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx hf(x_{1/2}) + hf(x_{3/2}) + hf(x_{5/2}) + hf(x_{7/2}) + \ldots + hf(x_{n-1/2})$$

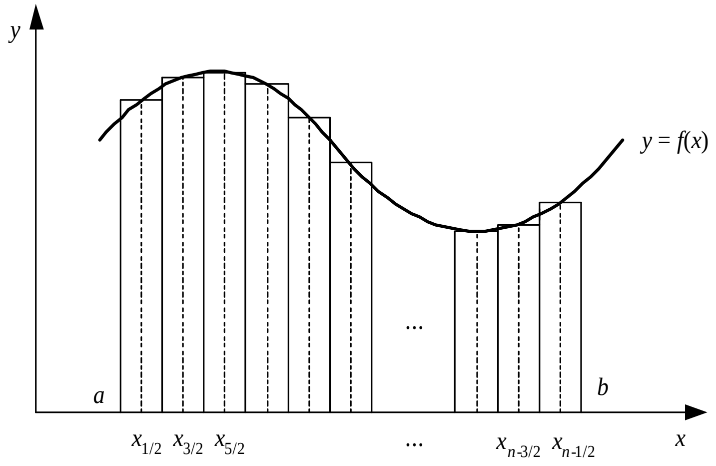
$$\approx h(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{n-1/2}) \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f_{i+1/2} \qquad \text{P.6.13)}$$

yang dalam hal ini,

$$x_{r+1/2} = a + (r+1/2)h)$$

dan

$$f_{r+1/2} = f(x_{r+1/2}) \qquad r = 0,1,2,..,n-1$$



Gambar 6.7 Kaidah titik-tengah gabungan

Program 6.2 KaidahTitik-tengah

```
procedure titik_tengah(a, b : real; n: integer; var I : real);
{ menghitung integrasi f(x) dalam selang [a, b] dengan jumlah pias
  sebanyak n.
  K.Awal : harga a, b, dan n sudah terdefinisi
  K.Akhir: I adalah hampiran integrasi yang dihitung dengan kaidah
           titik-tengah
}
var
   h, x, sigma : real;
   r : integer;
begin
   h:=(b-a)/n;       {lebar pias}
   x:= a+h/2;        {titik tengah pertama}
   sigma:=f(x);
   for r:=1 to n-1 do
    begin
      x:=x+h;
      sigma:=sigma + f(x)
    end;
   I:=sigma*h;              { nilai integrasi numerik}
end;
```

6.3.4 Galat Metode Pias

Sekarang akan kita hitung berapa besar galat hasil integrasi untuk masing-masing metode. Misalkan

I adalah nilai integrasi sejati

dan

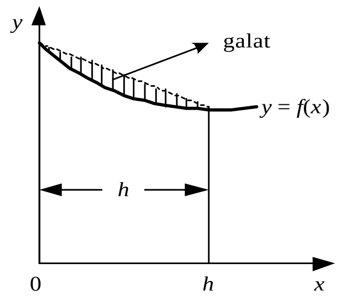
I' adalah integrasi secara numerik

maka galat hasil integrasi numerik didefenisikan sebagai

$$E = I - I' \qquad \text{(P.6.14)}$$

Untuk penurunan galat, kita tinjau galat integrasi di dalam selang [0, h],

$$I = \int_0^h f(x)dx \qquad \text{(P.6.15)}$$



Gambar 6.8 Galat kaidah trapesium (bagian yang diarsir)

Untuk setiap kaidah akan kita turunkan galatnya berikut ini.

6.3.4.1 Galat Kaidah Trapesium

Galat untuk satu buah pias (Gambar 6.8) adalah

$$E = \int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

Uraikan $f(x)$ ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 0$

$$f(x) = f_0 + xf_0' + \frac{1}{2}x^2 f_0'' + \frac{1}{6}x^3 f_0''' + ...$$

Uraikan $f_1 = f(x_1) = f(h)$ ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 0$

$$f_1 = f(x_1) = f(h) = f_0 + hf_0' + \frac{1}{2}h^2 f_0'' + ...$$

Maka,

$$E = \int_0^h [f_0 + xf_0' + \frac{1}{2}x^2 f_0'' + \frac{1}{6}x^3 f_0''' + ...]dx - \frac{h}{2}f_0 - \frac{h}{2}[f_0 + hf_0' + \frac{1}{2}h^2 f_0'' + ...]$$

$$= xf_0 + 1/2\, x^2 f_0' + 1/6\, x^3 f_0''' + ..\Big]_0^h - 1/2\, hf_0 - 1/2h\, f_0 - 1/2\, h^2 f_0' - 1/4\, h^3 f_0''' - ...$$

$$= (hf_o + 1/2\, h^2 f'_0 + 1/6\, h^3 f''_0 + ...) - (hf_0 + 1/2\, h^2 f'_0 + 1/4\, h^3 f_0''' + ...)$$

$$= -\frac{1}{12}h^3 f_0'' + ...$$

$$\approx -\frac{1}{12}h^3 f''(t), \qquad 0 < t < h \qquad \text{(P.6.16)}$$

$$\approx O(h^3)$$

Jadi,

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + O(h^3) \qquad \text{(P.6.17)}$$

Persamaan (P.6.17) ini menyatakan bahwa galat kaidah trapesium sebanding dengan h^3. Pernyataan ini dibuat dengan andaian bahwa *f(x)* menerus dalam selang [0, *h*]. Jika tidak, maka galat tidak sebanding dengan h^3 [NAK93].

Untuk *n* buah pias, galat keseluruhan (total) adalah

$$E_{tot} \approx -\frac{h^3}{12}\,(f_0'' + f_1'' + f_2'' + \ldots + f''_{n-1})$$

yang dapat disederhanakan dengan teorema nilai antara untuk penjumlahan menjadi

$$E_{tot} \approx -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n-1} f_i''$$

$$\approx -n\,\frac{h^3}{12}\,f''(t) \qquad , a < t < b \qquad \text{(P.6.18)}$$

Mengingat

$$h = \frac{b-a}{n}$$

maka

$$E_{tot} \approx -n\,\frac{h^3}{12}\,f''(t)$$

$$\approx -n\,\frac{b-a}{n}\,\frac{h^3}{12}\,f''(t)$$

$$\approx -\frac{h^3}{12}\,(b-a)\,f''(t) \qquad \text{(P.6.19)}$$

$$\approx O(h^2)$$

Dengan demikian,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\,(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n) + O(h^2) \qquad \text{(P.6.20)}$$

Jadi, galat total integrasi dengan kaidah trapesium sebanding dengan kuadrat lebar pias (*h*). Semakin kecil ukuran ukuran *h*, semakin kecil pula galatnya, namun semakin banyak jumlah komputasinya.

Contoh 6.1

[GER85] Hitung integral $\int_{1.8}^{3.4} e^x dx$ dengan kaidah trapesium. Ambil h = 0.2. Perkirakan juga batas- batas galatnya. Gunakan 5 angka bena.

Penyelesaian:

Fungsi *integrand*-nya adalah

$$f(x) = e^x$$

Jumlah pias adalah $n = (b-a)/h = (3.4 - 1.8)/0.2 = 8$

Tabel data diskritnya adalah sebagai berikut:

r	x_r	$f(x_r)$	r	x_r	$f(x_r)$
0	1.8	6.050	5	2.8	16.445
1	2.0	7.389	6	3.0	20.086
2	2.2	9.025	7	3.2	24.533
3	2.4	11.023	8	3.4	29.964
4	2.6	13.464			

Nilai integrasinya,

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx \approx \frac{h}{2}\,(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_6 + 2f_7 + f_8)$$

$$\approx \frac{0.2}{2}\,[[6.050 + 2(7.389) + 2(9.025) + \ldots + 2(16.445)$$

$$+ 2(20.086) + 2(24.533) + 29.964]$$

$$\approx 23.994$$

Nilai integrasi sejatinya adalah

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx = e^x \Big|_{x=1.8}^{x=3.4} = e^{3.4} - e^{1.8} = 29.964 - 6.050 = 23.914$$

Galat kaidah trapesium:

$$E = -\frac{h^2}{12}\,(b-a)\,f''(t)\,, \quad 1.8 < t < 3.4$$

Karena $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, dan $f''(x) = e^x$ maka

$$E = -\frac{1}{12}\,0.2^2(3.4 - 1.8)e^x \quad , 1.8 < t < 3.4$$

Karena fungsi $f(x) = e^x$ menaik secara monoton di dalam selang [1.8, 3.4], maka kita dapat menentukan batas-batas galatnya:

$$E = -\frac{1}{12}\,(0.2)^2\,(3.4 - 1.8)\times\begin{cases} e^{1.8}\,(\min) = -0.0323(\min) \\ e^{3.4}\,(\max) = -0.1598(\max) \end{cases}$$

atau

$$-0.0323 < E < -0.1598.$$

Di sini nilai sejati I harus terletak di antara

$$23.994 - 0.1598 = 23.834 \;\text{ dan }\; 23.994 - 0.0323 = 23.962$$

(nilai integrasi sejatinya adalah 23.914, yang memang terletak di antara 23.834 dan 23.962)

Galat hasil integrasi $\int_{1.8}^{3.4} e^x\,dx$ adalah

$$23.914 - 23.944 = -0.080$$

yang memang terletak di antara galat minimum dan galat maksimum. ■

6.3.4.2 Galat Kaidah Titik Tengah

Galat untuk satu buah pias adalah

$$E = \int_0^h f(x)dx - hf_{1/2}$$

Dengan cara penurunan yang sama seperti pada kaidah trapesium, dapat dibuktikan bahwa

$$E \approx \frac{h^3}{24} f''(t)\,,\; 0 < t < h \qquad \text{(P.6.20)}$$

Galat untuk seluruh pias adalah

$$E_{tot} \approx n\,\frac{h^3}{24}\,f''(t)\,, \qquad a < t < b$$

$$\approx \frac{h^2}{24}\,(b-a)\,f''(t) \qquad \text{(P.6.21)}$$

$$= O(h^2)$$

Dapat dilihat bahwa galat integrasi dengan kaidah titik tengah sama dengan 1/2 kali galat pada kaidah trapesium namun berbeda tanda. Dengan kata lain, kaidah titik tengah lebih baik daripada kaidah trapesium. Sayangnya, kaidah titik-tengah tidak dapat diterapkan jika fungsi $f(x)$ tidak diketahui secara eksplisit (hanya tersedia data berupa tabel titik-titik saja) sebab kita tidak dapat menghitung nilai tengah, $f_{r+1/2}$.

6.4 Metode Newton-Cotes

Metode *Newton-Cotes* adalah metode yang umum untuk menurunkan kaidah integrasi numerik. Polinom interpolasi menjadi dasar metode Newton-Cotes. Gagasannya adalah menghampiri fungsi $f(x)$ dengan polinom interpolasi $p_n(x)$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx \qquad \text{(P.6.22)}$$

yang dalam hal ini,

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Mengapa polinom interpolasi? Karena suku-suku polinom mudah diintegralkan dengan rumus integral yang sudah baku, yaitu

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

Sembarang polinom interpolasi yang telah kita bahas di dalam Bab 5 dapat digunakan sebagai hampiran fungsi, tetapi di dalam bab ini polinom interpolasi yang kita pakai adalah polinom Newton-Gregory maju:

$$p_n(x) = f_0 + (x - x_0)\frac{\Delta f_0}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2} + \ldots +$$

$$(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$$

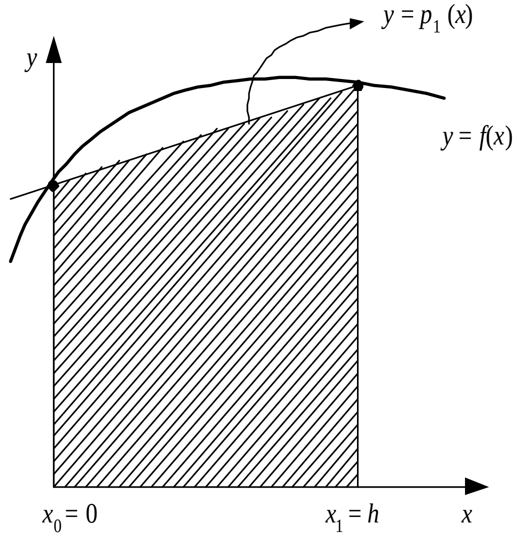
Dari beberapa kaidah integrasi numerik yang diturunkan dari metode Newton-Cotes, tiga di antaranya yang terkenal adalah:

1. Kaidah trapesium (*Trapezoidal rule*)
2. Kaidah Simpson 1/3 (*Simpson's 1/3 rule*)
3. Kaidah Simpson 3/8 (*Simpson's 3/8 rule*)

Sebagai catatan, kaidah trapesium sudah kita turunkan dengan metode pias. Metode Newton-Cotes memberikan pendekatan lain penurunan kaidah trapesium.

6.4.1 Kaidah Trapesium

Diberikan dua buah titik data (0, $f(0)$) dan (h, $f(h)$). Polinom interpolasi yang melalui kedua buah titik itu adalah sebuah garis lurus. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrasi adalah daerah di bawah garis lurus tersebut (Gambar 6.9).



Gambar 6.9 Kaidah trapesium

Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 1 yang melalui kedua buah titik itu adalah

$$p_1(x) = f(x_0) + x\frac{\Delta f(x_0)}{h} = f_0 + x\frac{\Delta f_0}{h}$$

Integrasikan $p_1(x)$ di dalam selang [0,1]:

$$I \approx \int_0^h f(x)dx \approx \int_0^h p_1(x)dx$$

$$\approx \int_0^h (f_0 + x\frac{\Delta f_0}{h})\, dx$$

$$\approx xf_0 + \frac{x^2}{2h}\Delta f_0 \Big|_{x=0}^{x=h}$$

$$\approx hf_0 + \frac{h}{2}\Delta f_0$$

$$\approx hf_0 + \frac{h}{2}(f_1 - f_0) \qquad \text{, sebab } \Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\approx \frac{h}{2}f_0 + \frac{h}{2}f_1$$

$$\approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

Jadi, kaidah trapesium adalah

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \qquad \text{(P.6.23)}$$

Galat kaidah trapesium sudah kita turunkan sebelumnya pada metode pias, yaitu

$$E = -\frac{1}{12}h^3 f''(t) = O(h^3) \qquad , \; 0 < t < h$$

Jadi,

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + O(h^3) \qquad \text{(P.6.24)}$$

Kaidah trapesium untuk integrasi dalam selang [0, *h*] kita perluas untuk menghitung

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

yang dalam hal ini, *I* sama dengan luas daerah integrasi di dalam selang [*a*, *b*]. Luas daerah tersebut diperoleh dengan membagi selang [*a*, *b*] menjadi *n* buah upaselang (*subinterval*) dengan lebar tiap upaselang *h*, yaitu $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ... , $[x_{n-1}, x_n]$. Titik-titik ujung tiap upaselang diinterpolasi dengan polinom derajat 1. Jadi, di dalam selang [*a*, *b*] terdapat *n* buah polinom derajat satu yang terpotong-potong (*piecewise*). Integrasi masing-masing polinom itu menghasilkan *n* buah kaidah trapesium yang disebut kaidah trapesium gabungan. Luas daerah integrasi di dalam selang [*a*, *b*] adalah jumlah seluruh luas trapesium, yaitu

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &\approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \ldots + \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) \\ &\approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n) \\ &\approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_i + \sum_{i=1}^{n-1} f_n) \end{aligned} \qquad \text{(P.6.25)}$$

dengan $f_r = f(x_r)$, $r = 0, 1, 2, ..., n$.

Galat total kaidah trapesium gabungan sudah kita turunkan pada metode pias, yaitu

$$E_{tot} \approx -\frac{h^2}{12}(b - a) f''(t) = O(h^2) , \qquad x_0 < t < x_n$$

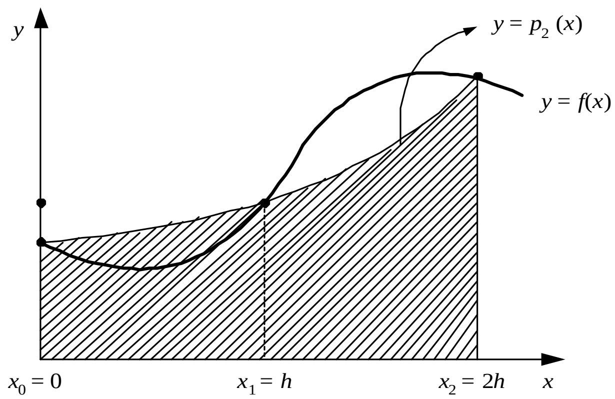
Dengan demikian,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n} f_i + f_n) + O(h^2) \qquad \text{(P.6.26)}$$

Jadi, galat integrasi dengan kaidah trapesium sebanding dengan h^2.

6.4.2 Kaidah Simpson 1/3

Hampiran nilai integrasi yang lebih baik dapat ditingkatkan dengan mengunakan polinom interpolasi berderajat yang lebih tinggi. Misalkan fungsi *f(x)* dihampiri dengan polinom interpolasi derajat 2 yang grafiknya berbentuk parabola. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrasi adalah daerah di bawah parabola (Gambar 6.10). Untuk itu, dibutuhkan 3 buah titik data, misalkan (0, *f*(0)), (*h*, *f(h)*), dan (*2h*, *f(2h)*).



Gambar 6.10 Kaidah Simpson 1/3

Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\,\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\,\Delta^2 f(x_0) \;=\; f_0 + x\,\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\,\Delta^2 f_0$$

Integrasikan $p_2(x)$ di dalam selang [0, 2*h*]:

$$I \approx \int_0^{2h} f(x)dx \approx \int_0^{2h} p_2(x)dx$$

$$\approx \int_0^{2h} \left(f_0 + \frac{x}{h}\,\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!\,h^2}\,\Delta^2 f_0 \right) dx$$

$$\approx f_0 x + \frac{1}{2h}\,x^2\,\Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h} \right) \Delta^2 f_0 \,\Bigg|_{x=0}^{x=2h}$$

$$\approx\ 2hf_0 + \frac{4h^2}{2h}\ \Delta f_0 + \left(\frac{8h^3}{6h^2} - \frac{4h^2}{4h}\right) \Delta^2 f_0$$

$$\approx\ 2hf_0\ +\ 2h\ \Delta f_0 +\ \left(\frac{4h}{3} - h\right) \Delta^2 f_0$$

$$\approx 2hf_0\ +\ 2h\ \Delta f_0\ +\ \frac{h}{3}\ \Delta^2 f_0$$

Mengingat

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

dan

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$

maka, selanjutnya

$$I\ \approx\ 2hf_0 + 2h\ (f_1 - f_0) + \frac{h}{3}\ (f_2 - 2f_1 + f_0)$$

$$\approx\ 2hf_0\ + 2hf_1 -\ 2hf_0 + \frac{h}{3}\ f_2 - \frac{2h}{3}\ f_1 + \frac{h}{3}\ f_0$$

$$\approx\ \frac{h}{3}\ f_0 + \frac{4h}{3}\ f_1 + \frac{h}{3}\ f_2$$

$$\approx\ \frac{h}{3}\ (f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad \text{(P.6.27)}$$

Persaman (P.6.27) ini dinamakan **kaidah Simpson 1/3**. Sebutan "1/3" muncul karena di dalam persamaan (P.6.26) terdapat faktor "1/3" (sekaligus untuk membedakannya dengan kaidah Smpson yang lain, yaitu Simpson 3/8).

Misalkan kurva fungsi sepanjang selang integrasi [a, b] kita bagi menjadi n+1 buah titik diskrit x_0, x_1, x_2, …, x_n, dengan n genap, dan setiap tiga buah titik (atau 2 pasang upaselang) di kurva dihampiri dengan parabola (polinom interpolasi derajat 2), maka kita akan mempunyai n/2 buah potongan parabola. Bila masing-masing polinom derajat 2 tersebut kita integralkan di dalam upaselang (*sub-interval*) integrasinya, maka jumlah seluruh integral tersebut membentuk **kaidah Simpson 1/3 gabungan**:

$$I_{\text{tot}}\ =\ \int_a^b f(x)dx\ \approx\ \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx\ +\ \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx\ +\ ...\ +\ \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \ldots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n\right) \qquad \text{(P.6.28)}$$

Persamaan (P.6.28) ini mudah dihafalkan dengan mengingat pola koefisien suku-sukunya:

1, 4, 2, 4, 2, ... ,2, 4, 1

Namun penggunaan kaidah 1/3 Simpson mensyaratkan jumlah upaselang (n) harus genap, ini berbeda dengan kaidah trapesium yang tidak mempunyai persyaratan mengenai jumlah selang.

Program 6.3 Kaidah Simpson 1/3

```
procedure Simpson_sepertiga(a, b : real; n: integer; var I : real);
{ menghitung integrasi f(x) dalam selang [a, b] dengan jumlah pias
  sebanyak n (n harus genap}
  K.Awal : harga a, b, dan n sudah terdefinisi (n harus genap)
  K.Akhir: I adalah hampiran integrasi yang dihitung dengan kaidah
           Simpson 1/3
}
var
   h, x, sigma : real;
   r : integer;
begin
   h:=(b-a)/n; {jarak antar titik }
   x:=a;       {awal selang integrasi}
   I:=f(a) + f(b);
   sigma:=0;
   for r:=1 to n-1 do
    begin
      x:=x+h;
      if r mod 2 = 1 then     { r = 1, 3, 5, ..., n-1 }
         sigma:=sigma + 4*f(x)
      else                    { r = 2, 4, 6, ..., n-2 }
         sigma:=sigma + 2*f(x);
    end;
   I:=(I+sigma)*h/3;  { nilai integrasi numerik}
end;
```

Contoh 6.2

Hitung integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \qquad\qquad [\text{NOB72}]$$

dengan menggunakan

(a) kaidah trapesium
(b) kaidah titik-tengah
(c) kaidah Simpson 1/3

Gunakan jarak antar titik h = 0.125.

Penyelesaian:

Jumlah upaselang: n = (1 - 0)/0.125 = 8

Tabel titik-titik di dalam selang [0,1]:
(untuk kaidah trapesium dan Simpson 1/3)

r	x_r	f_r
0	0	1
1	0.125	0.88889
2	0.250	0.80000
3	0.375	0.72727
4	0.500	0.66667
5	0.625	0.61538
6	0.750	0.57143
7	0.875	0.53333
8	1.000	0.50000

Tabel titik-titik di dalams elang [0, 1]:
(untuk kaidah titik-tengah)

r	x_r	f_r
1/2	0.063	0.94118
3/2	0.188	0.84211
5/2	0.313	0.76190
7/2	0.438	0.69565
9/2	0.563	0.64000
11/2	0.688	0.59259
13/2	0.813	0.55172
15/2	0.938	0.51613

(a) dengan kaidah trapesium

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx h/2\ (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_8)$$

$$\approx 0.125/2\ [1 + 2(0.88889) + 2(0.80000) + \ldots + 0.50000)$$

$$\approx 0.69412$$

(b) dengan kaidah titik-tengah

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx h\ (f_{1/2} + f_{3/2} + f_{5/2} + f_{7/2} + f_{9/2} + f_{11/2} + f_{13/2} + f_{15/2})$$

$$\approx 0.125\ (5.54128)$$

(c) dengan kaidah 1/3 Simpson

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx h/3\ (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8)$$

$$\approx 0.125/3\ (16.63568)$$
$$\approx 0.69315$$

Bandingkan solusi (a), (b), dan (c) dengan solusi sejatinya:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \ln(2) - \ln(1) = 0.69314718$$

yang apabila dibulatkan ke dalam 5 angka bena, $f(0.69314718) = 0.69315$, hasilnya tepat sama dengan nilai integrasi yang dihitung dengan kaidah Simpson 1/3. Jadi, kaidah Simpson/3 memang unggul dalam hal ketelitian hasil dibandingkan dua kaidah sebelumnya. ■

Galat Kaidah Simpson 1/3

Galat kaidah Simpson 1/3 untuk dua pasang upaselang adalah

$$E = \int_0^{2h} f(x)dx - \frac{h}{3}\ (f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad \text{(P.6.29)}$$

Uraikan $f(x)$, f_1, dan f_2 masing-masing ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 0$:

$$f(x) = f_0 + xf_0' + \frac{x^2}{2} f_0'' + \frac{x^3}{6} f_0''' + \frac{x^4}{24} f_0^{(iv)} + \ldots \qquad \text{(P.6.30)}$$

$$f_1 = f(h) = f_0 + hf_0' + \frac{h^2}{2} f_0'' + \frac{h^3}{6} f_0''' + \frac{h^4}{24} f_0^{(iv)} + \ldots \qquad \text{(P.6.31)}$$

$$f_2 = f(2h) = f_0 + 2h\, f_0' + \frac{4h^2}{2} f_0'' + \frac{8h^3}{6} f_0''' + \frac{16h^4}{24} f_0^{(iv)} + \ldots \qquad \text{(P.6.32)}$$

Sulihkan persamaan (P.6.30), (P.6.31), (P.6.32) ke dalam persamaan (P.6.29):

$$E = \int_0^{2h} \left(f_0 + xf_0' + \frac{x^2}{2} f_0'' + \frac{x^3}{6} f_0''' + \frac{x^4}{24} f_0^{(iv)} + \ldots \right) dx$$

$$- \frac{h}{3} \; [\; (\, f_0 \;+\; 4f_0 + \; 4hf_0' + \frac{4h^2}{2}\, f_0'' + \frac{4h^3}{6}\, f_0''' + \frac{4h^4}{24}\, f_0^{(iv)} \; + ...)$$

$$+ \; (f_0 + 2hf_0' + \frac{4h^2}{2}\; f_0'' + \frac{8h^3}{6}\; f_0''' + \frac{16h^4}{24}\; f_0^{(iv)} + ...) \;\;]$$

$$= (xf_0 \;+\; \frac{x^2}{2}\; f_0' + \frac{x^3}{6}\; f_0'' + \frac{x^4}{24}\; f_0''' + \frac{x^5}{120}\; f_0^{(iv)} \;+\; ...)\Bigg|_{x=0}^{x=2h}$$

$$- \frac{h}{3}\; (6f_0 + \; 6hf_0' + \; 4h^2 f_0'' + \; 2h^3 f_0''' + \frac{20h^4}{24}\; f_0^{(iv)} \; + ...)$$

$$= (2hf_0 + \;\; 2h^2 f_0' + \frac{4h^3}{3}\; f_0'' + \frac{2h^4}{3} f_0''' + \frac{32h^5}{120}\; f_0^{(iv)} \;\; +...)$$

$$- \, (2hf_0 + 2h^2 f_0' \;+\; \frac{4h^3}{3}\; f_0'' \;+\; \frac{2h^4}{3} f_0''' \;+\; \frac{20h^5}{72} f_0^{IV} + ...)$$

$$= \; \frac{32h^5}{120}\, f_0^{(iv)} - \; \frac{20h^5}{72}\; f_0^{(iv)} \; + ...$$

$$= \; (\; \frac{8}{30} \; - \; \frac{5}{180} \;) \; h^5 f_o^{(iv)} \; + ...$$

$$= - \; \frac{1}{90} \;\;\; h^5 f_0^{(iv)} \qquad\qquad (P.6.33)$$

$$= O(h^5)$$

Jadi, kaidah Simpson 1/3 untuk sepasang upaselang ditambah dengan galatnya dapat dinyatakan sebagai

$$\int_0^{2h} f\,(x)dx \;=\; \frac{h}{3}\; (\, f_0 + 4f_1 + f_2) + O(h^5)$$

Galat untuk $n/2$ pasang upaselang adalah

$$E_{tot} \;=\; - \frac{1}{90}\; h^5(\, f_0^{(iv)} \;+\; f_2^{(iv)} + \; f_4^{(iv)} \;\; + ... \;+\; f_{n\text{-}2}^{(iv)}) \;\; = - \frac{1}{90}\, h^5 \sum_{i=0,2,...}^{n-2} f_i^{(iv)}$$

$$= \; - \frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \; . \, f^{(iv)}(t) \qquad , \qquad a < t < b$$

$$= \; - \frac{h^4}{180}\; (b - a)\, f^{(iv)}(t) \qquad , \text{ karena } n = (b - a)/h \qquad\qquad (P.6.34)$$

$$= O(h^4)$$

Jadi, kaidah Simpson 1/3 gabungan ditambah dengan galatnya dapat dinyatakan sebagai,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f_i + f_n \right) + O(h^4)$$

dengan kata lain, kaidah Simpson 1/3 gabungan berorde 4. Dibandingkan dengan kaidah trapesium gabungan, hasil integrasi dengan kaidah Simpson gabungan jauh lebih baik, karena orde galatnya lebih tinggi. Tapi ada kelemahannya, yaitu kaidah Simpson 1/3 tidak dapat diterapkan bila jumlah upaselang (n) ganjil.

Contoh 6.3

Hitunglah $\int_0^1 \exp(-x^2)dx$ dengan menggunakan kaidah Simpson 1/3 dan jumlah upaselang yang digunakan adalah n = 10, lalu taksirlah batas-batas galatnya.

Penyelesaian:

h = (1 - 0)/10 = 0.1

Tabel titik-titik di dalam selang [0, 1] dengan h = 0.1:

r	x_r	f_r
0	0	1.000000
1	0.1	0.990050
2	0.2	0.960789
3	0.3	0.913931
4	0.4	0.852144
5	0.5	0.778801
6	0.6	0.697676
7	0.7	0.612626
8	0.8	0.527292
9	0.9	0.444858
10	1.0	0.367879

Nilai integasi $f(x)$ di dalam selang [0, 1] adalah:

$$I = \int_0^1 \exp(-x^2)dx$$

$$\approx h/3\ (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + f_{10})$$

$$\approx 0.1\ (1.000000 + 4 \times 0.990050 + 2 \times 0.960789 + \ldots + 4 \times 0.444858 + 0.367879)$$

$$\approx 0.746825$$

Taksiran galatnya:

$$f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)\exp(-x^2)$$

Nilai minimum $f^{(4)}(x)$ adalah pada $x = 2.5 + 0.5\sqrt{10}$, dengan $f^{(4)}(2.5 + 0.5\sqrt{10}) = -7.359$, sedangkan nilai maksimum $f^{(4)}(x)$ adalah pada $x = 0$, dengan $f^{(4)}(0) = 12$, maka batas-batas galatnya adalah

$$E_{tot} = -\frac{h^4}{180}(b - a) f^{(iv)}(t)$$

$$= -\frac{(0.1)^4}{180}(1 - 0) \times \begin{cases} -7.359(\min) = -0.000004 \\ 12(maks) = 0.000006 \end{cases}$$

Jadi, galat integrasinya, E_{tot}, terletak di dalam selang

$$-0.000004 < E_{tot} < 0.000006$$

Di sini nilai sejati I harus terletak di antara

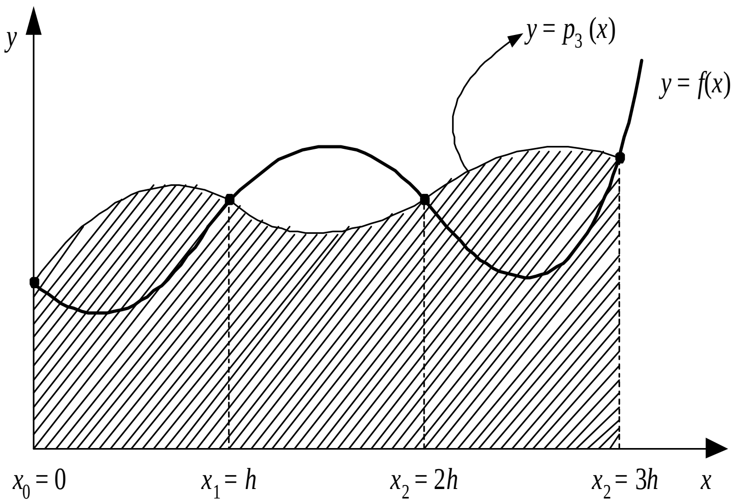
$$0.746825 - 0.000004 = 0.746821 \quad \text{dan } 0.746825 + 0.000006 = 0.746831$$

atau

$$0.746821 < I < 0.746831$$ ■

6.4.3 Kaidah Simpson 3/8

Seperti halnya pada kaidah Simpson 1/3, hampiran nilai integrasi yang lebih teliti dapat ditingkatkan terus dengan mengunakan polinom interpolasi berderajat lebih tinggi pula. Misalkan sekarang fungsi *f(x)* kita hampiri dengan polinom interpolasi derajat 3. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrasi adalah daerah di bawah kurva polinom derajat 3 tersebut parabola (Gambar 6.11). Untuk membentuk polinom interpolasi derajat 3, dibutuhkan 4 buah titik data, misalkan titik-titk tersebut (0, f(0)), (h, $f(h)$), ($2h$, $f(2h)$), dan ($3h$, $f(3h)$).



Gambar 6.11 Kaidah Simpson 3/8

Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 3 yang melalui keempat buah titik itu adalah

$$p_3(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\,\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\,\Delta^2 f(x_0) + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!h^3}\,\Delta^3 f(x_0)$$

$$= f_0 + \frac{x}{h}\,\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!h^3}\Delta^3 f(x_0) \qquad \text{(P.6.35)}$$

Integrasi $p_3(x)$ di dalam selang $[0,3h]$ adalah

$$I \approx \int_0^{3h} f(x)dx \approx \int_0^{3h} p_3(x)dx$$

$$\approx \int_0^{3h} \left[\ f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!h^3}\Delta^3 f(x_0)\ \right] dx$$

Dengan cara penurunan yang sama seperti pada kaidah Simpson 1/3, diperoleh

$$\int_0^{3h} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\,(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad \text{(P.6.36)}$$

yang merupakan **kaidah Simpson 3/8**.

Galat kaidah Simpson 3/8 adalah

$$E \approx -\frac{3}{80} h^5 f_0^{(\text{iv})}(t) \quad , \qquad 0 < t < 3h \tag{P.6.37}$$

Jadi, kaidah Simpson 3/8 ditambah dengan galatnya deapat dinyatakan sebagai

$$\int_0^{3h} f(x)dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + O(h^5)$$

Sedangkan kaidah **Simpson 3/8 gabungan** adalah

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + 3f_7 + 3f_8 + 2f_9 + \ldots$$

$$+ 2 f_{n-3} + 3 f_{n-2} + 3 f_{n-1} + f_n)$$

$$\approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3,6,9,\ldots}}^{n-1} f_i + 2 \sum_{i=3,6,9,\ldots}^{n-3} f_i + f_n) \tag{P.6.38}$$

Persamaan (P.6.38) ini mudah dhafalkan dengan mengingat pola suku-sukunya:

1, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, ... , 2, 3, 3, 1

Namun penggunaan kaidah Simpson 3/8 mensyaratkan jumlah upaselang (n) harus kelipatan tiga.

Galat kaidah 3/8 Simpson gabungan adalah

$$E_{\text{tot}} \approx \sum_{i=1}^{n/3} \frac{\left(-3h^5\right)}{80} f^{(\text{iv})}(t) \approx -\frac{3h^5}{80} \sum_{i=1}^{n/3} f^{(\text{iv})}(t)$$

$$\approx -\frac{3h^5}{80} \cdot \frac{n}{3} \cdot f^{(\text{iv})}(t)$$

$$\approx -\frac{h^5}{80} \frac{(b-a)}{h} f^{(\text{iv})}(t)$$

$$\approx \; - \frac{(b-a)h^4}{80} f^{(iv)}(t) \;, \qquad a < t < b \qquad \text{(P.6.39)}$$

$$= O(h^4)$$

Jadi, kaidah Simpson 3/8 ditambah dengan galatnya dapat dinyatakan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx \;\approx\; \frac{3h}{8} \left(f_0 + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3,6,9,\ldots}}^{n-1} f_i + 2 \sum_{i=3,6,9,\ldots}^{n-3} f_i + f_n \right) + O(h^4)$$

Kaidah Simpson 3/8 memiliki orde galat yang sama dengan orde galat kaidah Simpson 1/3. Namun dalam praktek, kaidah Simpson 1/3 biasanya lebih disukai daripada kaidah Simpson 3/8, karena dengan tiga titik (Simpson 1/3) sudah diperoleh orde ketelitian yang sama dengan 4 titik (Simpson 3/8). Tetapi, untuk *n* kelipatan tiga, kita hanya dapat menggunakan kaidah Simpson 3/8, dan bukan Simpson 1/3.

Program 6.4 Kaidah Simpson 3/8

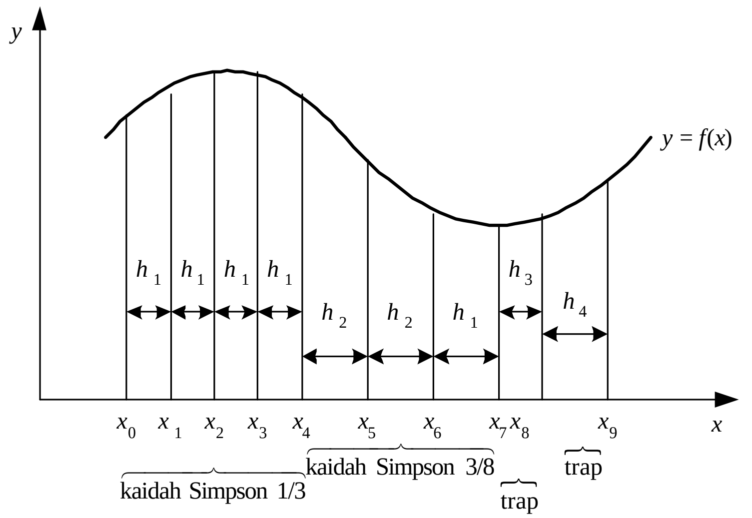
```
procedure Simpson_3per8(a, b : real; n: integer; var I : real);
{ menghitung integrasi f(x)dalam selang [a,b]dengan jumlah upa-selang
  sebanyak n (n harus kelipatan tiga} }
  K.Awal : harga a, b, dan n sudah terdefinisi, n kelipatan 3
  K.Akhir: I adalah hampiran integrasi yang dihitung dengan kaidah
           3/8 Simpson
}
var
   h, x, sigma : real;
   r : integer;
begin
   h:=(b-a)/n;  {jarak antar titik }
   x:=a;        {awal selang integrasi}
   I:=f(a) + f(b);
   sigma:=0;
   for r:=1 to n-1 do
    begin
      x:=x+h;
      if r mod 3 = 0 then     { r = 3, 6, 9, ..., n-3 }
         sigma:=sigma + 2*f(x)
      else     { r ¹ 3, 6, 9, ..., n-1 }
        sigma:=sigma + 3*f(x);
   end;
   I:=(I+sigma)*3*h/8;        { nilai integrasi numerik}
end;
```

6.4.4 Metode Integrasi Numerik Untuk *h* yang Berbeda-beda

Misalkan jarak antara titik-titik data dalam selang [a, b] tidak seragam. Beberapa titik data mempunyai jarak h_1, beberapa titik data lain h_2, sedangkan sisanya berjarak h_3. Integrasi numerik dalam selang [a, b] dilakukan dengan mengkombinasikan kaidah integrasi yang sudah ada, misalnya kombinasi kaidah trapesium, kaidah 1/3 Simpson, dan kaidah 3/8 Simpson. Berdasarkan orde galatnya, kaidah 1/3 Simpson dan 3/8 Simpson lebih teliti daripada kaidah trapesium. Karena itu, kaidah 1/3 Simpson diterapkan bila jumlah upaselang yang bertetangga genap, sedangkan kaidah 3/8 Simpson diterapkan bila jumlah upaselang yang bertetangga ganjil dan kelipatan tiga. Sisanya dihitung dengan kaidah trapesium. Jadi, tata-ancangnya dapat diringkas sebagai berikut :

(a) untuk sejumlah upaselang berturutan yang berjarak sama adalah genap, gunakan kaidah 1/3 Simpson
(b) untuk sejumlah upaselang berturutan yang berjarak sama adalah kelipatan tiga, gunakan kaidah 3/8 Simpson
(c) untuk sejuumlah upaselang yang tidak berjarak sama dengan tetangganya, gunakan kaidah trapesium

Contohnya dapat dilihat pada Gambar 6.12. Empat buah upaselang pertama berjarak sama, lebih baik menggunakan kaidah Simpson 1/3 (karena jumlah upaselang genap). Tiga buah upaselang berikutnya berjarak sama, lebih baik menggunakan kaidah Simpson 3/8 (karena jumlah upaselang kelipatan 3). Dua buah upaselang berikutnya masing-masing berbeda lebarnya, maka setiap upaselang dihitung integrasinya dengan kaidah trapesium.



Gambar 6.12 Kaidah 1/3 Simpson gabungan

6.4.5 Bentuk Umum Metode Newton-Cotes

Kaidah trapesium, kaidah Simpson 1/3, dan kaidah Simpson 3/8 adalah tiga buah metode integrasi numerik pertama dari metode Newton-Cotes. Masing-masingnya menghampiri fungsi $f(x)$ dengan polinom interpolasi derajat 1 (lanjar), derajat 2 (kuadratik), dan derajat 3 (kubik). Kita dapat menemukan kaidah-kaidah lainnya dengan menggunakan polinom interpolasi derajat 4, 5, 6, dan seterusnya.

Bentuk umum metode Newton-Cotes dapat ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha\, h[w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2 + ... + w_n f_N] + E \qquad \text{(P.6.40)}$$

dalam hal ini $f_r = f(x_r)$, $x_r = a + rh$, dan $h = (b - a)/n$, E menyatakan galat, sedangkan α dan w_i adalah konstanta riil seperti yang didaftarkan pada tabel berikut ini :

n	α	w_i , i = 1, 2, ..., n	E	Nama
1	1/2	1 1	$-1/12\ h^3 f''$	Trapesium
2	1/3	1 4 1	$-1/90\ h^5 f^{(4)}$	1/3 Simpson
3	3/8	1 3 3 1	$-3/80\ h^5 f^{(4)}$	3/8 Simpson
4	2/45	7 32 12 32 7	$-8/945\ h^7 f^{(6)}$	Boole
5	5/288	19 75 50 50 75 19	$-275/12096\ h^7 f^{(4)}$	
6	1/140	41 216 27 272 27 216 41	$-9/1400\ h^9 f^{(8)}$	
7	7/17280	751 3577 1323 2989 2989 1323 3577 751	$-8183/518400\ h^9 f^{(8)}$	
8	8/14175	989 5888 -928 10496 -4540 10496 -928 5888 989	$-2368/467775\ h^{11} f^{(10)}$	
9	9/89600	2857 15741 1080 19344 5788 5788 19344 1080 15741 2857	$-173/14620\ h^{11} f^{(10)}$	
10	5/299376	16067 106300 -48525 272400 -260550 427368 -260550 272400 -48525 106300 16067	$-1346350/326918592\ h^{13} f^{(12)}$	

Dari tabel di atas nilai-nilai w akan semakin besar dengan membesarnya n. Dari teori galat sudah diketahui bahwa pengurangan bilangan yang besar dengan bilangan yang kecil di dalam komputer dapat menyebabkan galat pembulatan. Karena alasan itu, maka metode-metode Newton-Cotes orde tinggi kurang disukai. Alasan lainnya, orde metode menyatakan ketelitian hanya jika ranah integrasi [a, b] cukup kecil sehingga turunan fungsi hampir tetap di dalam ranah nilai tersebut. Sebagai implikasinya, metode Newton-Cotes orde tinggi tidak lebih teliti daripada metode orde rendah bila turunannya berubah secara signifikan di dalam ranah tersebut.

Sebagai contoh adalah perhitungan integrasi

$$L = \int_0^{p} \sqrt{[(2+2\cos x)^2 + 4\sin^2 x]}\, dx = ...$$

Hasil perhitungan L dengan metode Newton-Cotes orde n = 2 sampai orde n = 10 adalah:

n = 2, L = 8.01823	n = 7 L = 8.00000
n = 3, L = 8.00803	n = 8 L = 8.00000
n = 4, L = 7.99993	n = 9 L = 8.00197
n = 5, L = 7.99996	n = 10 L = 7.99201
n = 6, L = 8.00000	Nilai integrasi sejati L = *8.00000*

Hasil di atas menggambarkan hasil integrasi yang nilainya semakin tidak bagus dengan semakin tingginya orde metode Newton-Cotes (n). Dari n = 2 sampai n = 8, nilai L mendekati hasil sejati, 8.00000. Setelah n = 8, galatnya meningkat. Peningkatan galat disebabkan oleh galat penambahan dan pengurangan bilangan-bilangan yang sangat besar di dalam metodenya [NAK92]

6.5 Singularitas

Kita akan kesulitan melakukan menghitung integrasi numerik apabila fungsi tidak terdefenisi di $x = t$, dalam hal ini $a < t < b$. Misalnya dalam menghitung integrasi

$$I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

fungsi $f(x) = \cos x/\sqrt{x}$ jelas tidak terdefinisi di $x = 0$ (ujung bawah selang). Begitu juga apabila perhitungan integrasi

$$I = \int_{0.5}^{2} \frac{1}{x-1} dx$$

menggunakan h = 0.1, titik diskrit di x =1 tidak dapat dihitung sebab fungsi $f(x)$ = $1/(x-1)$ tidak terdefinisi di x = 1. Fungsi yang tidak terdefinisi di $x = t$, untuk *a* £ *t* £ *b*, dinamakan fungsi **singular**.

Singularitas juga muncul pada fungsi yang turunannya tidak terdefinisi di $x = t$, untuk *a* £ *t* £ *b*. Misalnya hasil perhitungan integrasi $\int_0^1 \sqrt{x}$ memperlihatkan hasil yang menyimpang meskipun fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ sendiri terdefinisi untuk semua $x = t$, untuk *a* £ *t* £ *b*. Penyimpangan ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Misalkan integral $\int_0^1 \sqrt{x}$ dihitung dengan kaidah trapesium.

Tinjau kembali galat total pada kaidah trapesium:

$$E_{tot} \approx -\frac{h^3}{12}\,(f_0'' + f_1'' + \ldots + f''_{n-1})$$

$$\approx -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f_i''$$

$$\approx -\frac{h^3}{12}\int_a^b f(x)dx$$

$$\approx -\frac{h^3}{12}[\,f'(b) - f'(a)] \qquad \text{(P.6.41)}$$

Persamaan (P.6.41) menyiratkan bahwa galat integrasi $\int_a^b f(x)dx$ akan besar apabila $f'(a)$ atau $f'(b)$ tidak ada.

Singularitas harus dihilangkan dengan cara memanipulasi persamaan fungsi sedemikian sehingga ia tidak singular lagi.

Contoh 6.4

Ubahlah fungsi integrasi

$$I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$$

sehingga menjadi tidak singular lagi.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = \cos(x)/\sqrt{x}$ tidak terdefenisi di $x = 0$.

Misalkan

$$x = u^2 \rightarrow dx = 2u\, du$$

Batas-batas selang integrasi juga berubah

$$x = 0 \rightarrow u = \sqrt{x} = 0$$
$$x = 1 \rightarrow u = \sqrt{x} = 1$$

maka

$$I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\cos(u^2)}{u} (2u) du$$

$$I = \int_0^1 2\cos(u^2) du \quad \rightarrow \text{tidak singular lagi}$$ ■

Contoh 6.5

Ubahlah fungsi integrasi

$$I = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx$$

sehingga menjadi tidak singular lagi

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ singular sebab turunannya

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

tidak terdefinisi di $x = 0$

Misalkan

$$x = u^2 \rightarrow dx = 2u\, du$$

Batas-batas selang integrasi juga berubah

$x = 0 \quad \rightarrow u = \sqrt{x} = 0$
$x = 1 \quad \rightarrow u = \sqrt{x} = 1$

maka

$$I = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \int_0^1 2u^2\ du \quad \rightarrow \text{ tidak singular lagi} \qquad \blacksquare$$

Contoh 6.6

Ubahlah fungsi integrasi berikut sehingga menjadi tidak singular:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1 - x^3)}}$$

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = 1/\sqrt{(\sin x)(1 - x^3)}$ tidak terdefenisi di $x = 0$ dan $x = 1$
Pecah integral I menjadi dua bagian, I_1 dan I_2 :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1 - x^3)}} = \underbrace{\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1 - x^3)}}}_{I_1\text{ , singular di } x = 0} + \underbrace{\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1 - x^3)}}}_{I_2\text{ , singular } x = 1}$$

dengan $0 < a < 1$

Misalkan

$x = u^2 \quad \rightarrow \quad dx = 2u\, du$

Batas-batas integrasi

$x = a \ \rightarrow u = \sqrt{a}$
$x = 0 \ \rightarrow u = 0$

Maka,

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{2u\ du}{\sqrt{(\sin u^2)(1 - u^6)}} = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{u/u}{\sqrt{\dfrac{(\sin u^2)(1 - u^6)}{u^2}}}\ \mathrm{du}$$

Mengingat

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u^2)}{u^2} = 1$$

maka

$$I_1 = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{(1-u^6)}} \, du \rightarrow \text{tidak singular lagi}$$

$$I_2 = \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{(\sin x)(1-x^3)}} \quad \rightarrow \text{tidak dapat diterapkan pemisalan } x = u^2$$

Uraikan $(1 - x^3)$ menjadi $(1 - x)(1 + x + x^2)$:

$$I_2 = \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{(\sin x)(1-x)(1+x+x^2)}}$$

Misalkan

$$1 - x = u^2 \rightarrow -dx = 2u\, du$$

Batas-batas integrasi :

$$x = 1 \rightarrow u = \sqrt{(1-x)} = 0$$
$$x = a \rightarrow u = \sqrt{(1-a)}$$

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{1-a}} \frac{-2u\, du}{\sqrt{[\sin(1-u^2)]u^2\left[1+(1-u^2)+(1-u^2)^2\right]}}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{1-a}} \frac{u\, du}{\sqrt{[\sin(1-u^2)]}\,(3-3\mathrm{u}^2-u^4)}$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{1-a}} \frac{du}{\sqrt{[\sin(1-u^2)]}\,(3-3\mathrm{u}^2-u^4)} \qquad \rightarrow \text{tidak singular lagi} \qquad \blacksquare$$

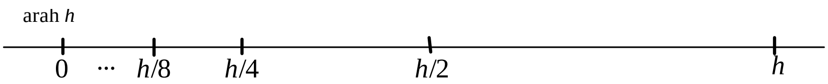
Cara lain penanganan singularitas dapat dilihat di [NAK93] halaman 140.

6.6 Penggunaan Ekstrapolasi untuk Integrasi

Misalkan $I(h)$ adalah perkiraan nilai integrasi dengan jarak antara titik data adalah h ($h < 1$). Dari persaman galat kaidah integrasi (trapesium, Simpson 1/3, dll) yang dinyatakan dalam notasi orde:

$$E = O(h^p)$$

dapat dilihat bahwa galat E semakin kecil bila digunakan h yang semakin kecil, seperti yang ditunjukkan oleh diagram garis berikut:



Nilai sejati integrasi adalah bila $h = 0$, tetapi pemilihan $h = 0$ tidak mungkin kita lakukan di dalam rumus integrasi numerik sebab ia akan membuat nilai integrasi sama dengan 0. Yang dapat kita peroleh adalah perkiraan nilai integrasi yang lebih baik dengan melakukan ekstrapolasi ke $h = 0$. Ada dua macam metode ekstrapolasi yang digunakan untuk integrasi:

1. Ekstrapolasi Richardson
2. Ekstrapoalsi Aitken

6.6.1 Ekstrapolasi Richardson

Pandang kembali kaidah trapesium

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n} f_i + f_n\right) - \frac{(b-a)f''(t)}{12}h^2$$

yang dapat ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^2$$

dengan $I(h)$ adalah integrasi dengan menggunakan kaidah trapesium dengan jarak antar titik selebar h dan $C = \dfrac{(b-a)f''(t)}{12}$.

Secara umum, kaidah integrasi yang lain dapat kita ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^q \tag{P.6.42}$$

dengan C dan q adalah konstanta yang tidak bergantung pada h. Nilai q dapat ditentukan langsung dari orde galat kaidah integrasi, misalnya

kaidah trapesium, $O(h^2)$ $\rightarrow$ $q = 2$
kaidah titik-tengah, $O(h^2)$ $\rightarrow$ $q = 2$
kaidah 1/3 Simpson, $O(h^4)$ $\rightarrow$ $q = 4$

Tujuan ekstrapolasi Richardson ialah menghitung nilai integrasi yang lebih baik (*improve*) dibandingkan dengan I. Misalkan J adalah nilai integrasi yang lebih baik daripada I dengan jarak antar titik adalah h:

$$J = I(h) + Ch^q \tag{P.6.43}$$

Ekstrapolasikan h menjadi $2h$, lalu hitung integrasi numeriknya

$$J = I(2h) + C(2h)^q \tag{P.6.44}$$

Eliminasikan C dari kedua persamaan dengan menyamakan persamaan (P.6.43) dan persamaan (P.6.44):

$$I(h) + Ch^q = I(2h) + C(2h)^q$$

sehingga diperoleh

$$C = \frac{I(h) - I(2h)}{(2^q - 1)h^q} \tag{P.6.45}$$

Sulihkan (P.6.45) ke dalam (P.6.43) untuk memperoleh:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1} \tag{P.6.46}$$

yang merupakan persamaan **ekstrapolasi Ricahrdson**. Ekstrapolasi Richardson dapat kita artikan sebagai berikut:

> Mula-mula hitunglah nilai integrasi dengan kaidah yang sudah baku dengan jarak antar titik selebar h untuk mendapatkan $I(h)$, kemudian hitung kembali nilai integrasi dengan jarak antar titik selebar $2h$ untuk memperoleh $I(2h)$. Akhirnya, hitung nilai integrasi yang lebih baik dengan menggunakan persamaan (P.6.46).

Perhatikanlah bahwa jika pernyataan di atas dibalik, kita telah melakukan ekstrapolasi menuju h = 0, yaitu kita hitung $I(2h)$ lalu hitung $I(h)$. Urutan pengerjaan ($I(2h)$ atau I(h) lebih dulu) tidak mempengaruhi solusi akhirnya.

Sebagai contoh, bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah trapesium (q = 2), maka ekstrapolasi Richardson-nya adalah

$$J = I(h) + \frac{1}{3} [I(h) - I(2h)] \qquad \text{(P6.47)}$$

dan bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah 1/3 Simpson (q = 4), maka ekstrapolasi Richardson-nya adalah

$$J = I(h) + \frac{1}{15} [I(h) - I(2h)] \qquad \text{(P.6.48)}$$

Perhatikanlah bahwa suku 1/3 [$I(h) - I(2h)$] pada persamaan (P.6.47) dan suku 1/15 [$I(h) - I(2h)$] pada persaman (P.6.48) merupakan **faktor koreksi**. Artinya, nilai taksiran integrasi $I(h)$ dapat ditingkatkan menjadi nilai yang lebih baik dengan menambahkan faktor koreksi tersebut.

Contoh 6.7

Hitung kembali integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

dengan menggunakan ekstrapolasi Richardson, yang dalam hal ini $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah trapesium dan h = 0.125.

Penyelesaian:

Jumlah upaselang: n = (1 - 0)/0.125 = 8

Tabel titik-titik di dalam selang [0,1] dengan h = 0.125:

r	x_r	f_r
0	0	1
1	0.125	0.88889
2	0.250	0.80000
3	0.375	0.72727

4	0.500	0.66667
5	0.625	0.61538
6	0.750	0.57143
7	0.875	0.53333
8	1.000	0.50000

$I(h)$ adalah nilai integrasi dengan kaidah trapesium menggunakan h = 0.125:

$$I(h) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx h/2\,(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_8)$$

$$\approx 0.125/2\,[1 + 2(0.88889) + 2(0.80000) + \ldots + 0.50000)$$

$$\approx 0.69412$$

$I(2h)$ adalah nilai integrasi dengan kaidah trapesium menggunakan $2h$ = 0.250:

$$I(2h) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx (2h)/2\,(f_0 + 2f_2 + 2f_4 + 2f_6 + f_8)$$

$$\approx 0.250/2\,[1 + 2(0.80000) + 2(0.66667) + 2(0.57143) + 0.50000)$$

$$\approx 0.69702$$

Nilai integrasi yang lebih baik, J, diperoleh dengan ekstrpolasi Richardson:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1}$$

yang dalam hal ini, q = 2, karena $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah trapesium (yang mempunyai orde galat = 2)

$$J = 0.69412 + \frac{0.69412 - 0.69702}{2^2 - 1} = 0.69315$$

Jadi, taksiran nilai integrasi yang lebih baik adalah 0.69315. Bandingkan dengan nilai integrasi sejatinya:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \ln(2) - \ln(1) = 0.69314718$$

yang apabila dibulatkan ke dalam 5 angka bena, $f(0.69314718)$ = 0.69315, hasilnya tepat sama dengan nilai integrasi yang dihitung dengan ekstrapolasi Richardson. ■

Contoh 6.8

Perlihatkan bahwa bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah trapesium, maka persamaan ekstrapolasi Richardson menyatakan kaidah Simpson 1/3.

Penyelesaian:

Kaidah 1/3 Simpson untuk sepasang upaselang adalah (lihat Gambar 6.10) adalah

$$I = \int_0^{2h} f(x)dx$$

$I(h)$ dan $I(2h)$ adalah perkiraan hasil integrasi dengan kaidah trapesium menggunakan pias masing-masing selebar h dan $2h$:

$$I(h) = {}^{h}/_{2}\,(f_0 + f_1) + {}^{h}/_{2}\,(f_1 + f_2) = {}^{h}/_{2}\,(f_0 + 2f_1 + f_2)$$
$$I(2h) = {}^{(2h)}/_{2}\,(f_0 + f_2) = h(f_0 + f_2)$$

Ekstrapolasi Richardson-nya ($q = 2$):

$$\begin{aligned}
J &= I(h) + \frac{1}{3}\,[\,I(h) - I(2h)\,] \\
&= {}^{h}/_{2}\,(f_0 + 2f_1 + f_2) + {}^{1}/_{3}\,({}^{h}/_{2}\,(f_0 + 2f_1 + f_2) - h(f_0 + f_2)) \\
&= {}^{h}/_{2}\,(f_0 + 2f_1 + f_2) + {}^{h}/_{6}\,(f_0 + 2f_1 + f_2) - {}^{h}/_{3}\,(f_0 + f_2) \\
&= {}^{h}/_{2}\,f_0 + hf_1 + {}^{h}/_{2}\,f_2 + {}^{h}/_{6}\,f_0 + {}^{h}/_{3}\,f_1 + {}^{h}/_{6}\,f_2 - {}^{h}/_{3}\,f_0 - {}^{h}/_{3}\,f_2 \\
&= {}^{h}/_{2}\,f_0 + {}^{h}/_{6}\,f_0 - {}^{h}/_{3}\,f_0 + hf_1 + {}^{h}/_{3}\,f_1 + {}^{h}/_{2}\,f_2 + {}^{h}/_{6}\,f_2 - {}^{h}/_{3}\,f_2 \\
&= {}^{h}/_{3}\,f_0 + {}^{4h}/_{3}\,f_1 + {}^{h}/_{3}\,f_2 \\
&= {}^{h}/_{3}\,(f_0 + 4f_1 + f_2)
\end{aligned}$$

yang merupakan kaidah Simpson 1/3. Jadi, berdasarkan definisi ekstrapolasi Richardson, kaidah Simpson 1/3 adalah perkiraan integrasi yang lebih baik daripada kaidah trapesium. Contoh ini bersesuaian dengan jawaban Contoh 6.7, sebab nilai integrasi dengan ekstrapoalsi Richardson sama dengan nilai integrasi yang diperoleh dengan kaidah Simpson 1/3 (lihat jawabannya pada Contoh 6.2). ■

Persamaan ekstrapolasi Richardson memenuhi semua kaidah integrasi yang dirurunkan dengan metode pias maupun metode Newton-Cotes. Kita pun dapat menurunkan kaidah integrasi numerik yang baru dengan menerapkan ekstrapolasi Richardson. Misalkan bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah Simpson 1/3, maka ekstrapolasi Richardson menyatakan **kaidah Boole** (buktikan!):

$$J = \int_0^{4h} f(x)dx = \frac{2h}{45}\,(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

yang berarti kaidah Boole merupakan taksiran integrasi yang lebih baik daripada kaidah Simpson 1/3.

Bila ekstrapolasi Richardson diterapkan secara terus menerus, akan diperoleh nilai integrasi yang semakin lama semakin baik (galatnya semakin kecil). Metode penerapan ekstrapolasi Richardson seperti ini dinamakan **metode Romberg**.

6.6.2 Metode Romberg

Metode integrasi Romberg didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson untuk memperoleh nilai integrasi yang semakin baik. Sebagai catatan, setiap penerapan ekstrapolasi Richardson akan menaikkan order galat pada hasil solusinya sebesar dua:

$$O(h^{2N}) \qquad \rightarrow O(h^{2N+2})$$

Misalnya,bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah trapesium yang berorde galat $O(h^2)$, maka ekstrapolasi Richardson menghaslkan kaidah Simpson 1/3 yang berorde $O(h^4)$. Selanjutnya, bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah Simpson 1/3, ekstrapolasi Richardson menghaslkan kaidah Boole yang berorde $O(h^6)$.

Tinjaau kembali persamaan ekstrapolasi Richardson:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1}$$

Misalkan I adalah nilai integrasi sejati yang dinyatakan sebagai

$$I = A_k + Ch^2 + Dh^4 + Eh^6 + \ldots$$

yang dalam hal ini

$$h = (b - a)/n$$

dan

$$A_k = \text{Perkiraan nilai integrasi dengan kaidah trapesium dan jumlah pias } n = 2^k$$

Orde galat A_k adalah $O(h^2)$.

Sebagai contoh, selang [a, b] dibagi menjadi 64 buah pias atau upaselang:

$$n = 64 = 2^6 \rightarrow \; k = 6 \;\; (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

k = 0 (artinya $n = 2^0$ = 1 pias, $h_0 = (b\text{-}a)/1$) $\rightarrow A_0 = h_0/2$ [$f_0 + f_{64}$]
k = 1 (artinya $n = 2^1$ = 2 pias, $h_1 = (b\text{-}a)/2$) $\rightarrow A_1 = h_1/2$ [$f_0 + 2f_{32} + f_{64}$]
k = 2 (artinya $n = 2^2$ = 4 pias, $h_2 = (b\text{-}a)/4$) $\rightarrow A_2 = h_2/2$ [$f_0 + 2f_{16} + 2f_{32} +$
$2f_{48} + f_{64}$]
k = 3 (artinya $n = 2^3$ = 8 pias, $h_3 = (b\text{-}a)/8$) $\rightarrow A_2 = h_3/2$ [$f_0 + 2f_8 + 2f_{16} +$
$2f_{24} + 2f_{32} + 2f_{40} + 2f_{48} + 2f_{56} + f_{64}$]
...
k = 6 (artinya $n = 2^6$ = 64 pias, $h_6 = (b\text{-}a)/64$) $\rightarrow A_6 = h_6/2$ [$f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots +$
$2f_{63} + f_{64}$]

Arti dari setiap A_k adalah sebagi berikut:

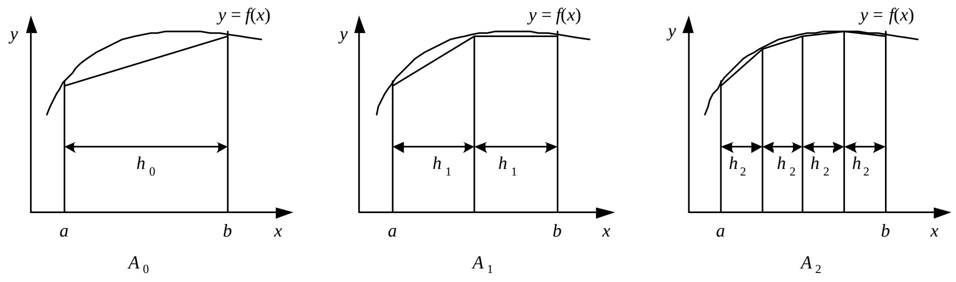
A_0 adalah taksiran nilai integrasi $I = \int_a^b f(x)dx$ dengan menggunakan kaidah trapesium dengan pembagian daerah integrasi menjadi $n = 2^0$ = 1 buah pias;

A_1 adalah taksiran nilai integrasi $I = \int_a^b f(x)dx$ dengan menggunakan kaidah trapesium dengan pembagian daerah integrasi menjadi $n = 2^1$ = 2 buah pias;

A_2 adalah taksiran nilai integrasi $I = \int_a^b f(x)dx$ dengan menggunakan kaidah trapesium dengan pembagian daerah integrasi menjadi $n = 2^2$ = 4 buah pias;

A_6 adalah taksiran nilai integrasi $I = \int_a^b f(x)dx$ dengan menggunakan kaidah trapesium dengan pembagian daerah integrasi menjadi $n = 2^6$ = 64 buah pias;

Tiga A_k yang pertama dilukiskan oleh Gambar 6.13.



Gambar 6.13 Luas daerah A_0, A_1, A_2, ... , dengan jumlah upaselang masing-masing n = 1, n = 2, n = 4, ...

Gunakan A_0, A_1,...A_k pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan B_1, B_2, ...,B_k , yaitu

$$B_k = A_k + \frac{A_k - A_{k-1}}{2^2 - 1}$$

Jadi, nilai I (yang lebih baik) sekarang adalah $I = B_k + D'h^4 + E'h^6 + \ldots$ dengan orde galat B_k adalah $O(h^4)$.

Selanjutnya, gunakan B_1, B_2 ,.., B_k pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan C_2, C_3,..., C_k, yaitu

$$C_k = B_k + \frac{B_k - B_{k-1}}{2^4 - 1}$$

Jadi, nilai I (yang lebih baik) sekarang adalah $I = C_k + E'' h^6 + ...$ dengan orde galat C_k adalah $O(h^6)$.

Selanjutnya, gunakan C_2, C_3 ,..., C_k pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan $D3$, $D4$, ... , D_k , yaitu

$$D_k = C_k + \frac{C_k - C_{k-1}}{2^6 - 1}$$

Jadi, nilai I (yang lebih baik) sekarang adalah $I = D_k + E''' h^8 + ...$ dengan orde galat D_k adalah $O(h^8)$. Demikian seterusnya. Dari runtunan tersebut, diperoleh tabel yang dinamakan **tabel Romberg** seperti berikut ini:

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$	$O(h^{12})$	$O(h^{14})$
A_0						
A_1	B_1					
A_2	B_2	C_2				
A_3	B_3	C_3	D_3			
A_4	B_4	C_4	D_4	E_4		
A_5	B_5	C_5	D_5	E_5	F_5	
A_6	B_6	C_6	D_6	E_6	F_6	G_6

Nilai integrasi
yang lebih baik

Contoh 6.9

Hitung integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

dengan metode Romberg (n = 8). Gunakan 5 angka bena.

Penyelesaian:

Jarak antar titik: h = (1 - 0)/8 = 0.125

Tabel titik-titik di dalam selang [0,1] dengan h = 0.125:

r	x_r	f_r
0	0	1.0000
1	0.125	0.88889
2	0.250	0.80000
3	0.375	0.72727
4	0.500	0.66667
5	0.625	0.61538
6	0.750	0.57143
7	0.875	0.53333
8	1.000	0.50000

$A_0 = h_0/2\ [\ f_0 + f_8] = 1/2\ (1 + 0.50000) = 0.75000$
$A_1 = h_1/2\ [\ f_0 + 2f_4 + f_8] = 0.5/2[1 + 2(0.66667) + 0.50000] = 0.70833$

$A_2 = h_2/2\ [\ f_0 + 2f_2 + 2f_4 + 2f_6 + f_8]$
$= 0.250/2[1 + 2(0.80000) + 2(0.66667) + 2(0.57143) + 0.50000] = 0.69702$

$A_3 = h_3/2\ [\ f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_8]$
$= 0.125/2[1 + 2(0.88889) + 2(0.80000) + \ldots + 2(0.53333) + 0.50000]$
$= 0.69412$

$$B_1 = A_1 + \frac{A_1 - A_0}{2^2 - 1} = 0.69445$$ (A_k berorde 2, jadi $q = 2$)

$$B_2 = A_2 + \frac{A_2 - A_1}{2^2 - 1} = 0.69325$$

$$B_3 = A_3 + \frac{A_2 - A_1}{2^2 - 1} = 0.69315$$

$$C_2 = B_2 + \frac{B_2 - B_1}{2^4 - 1} = 0.69317$$ (B_k berorde 4, jadi $q = 4$)

$$C_3 = B_3 + \frac{B_3 - B_2}{2^4 - 1} = 0.69314$$

$$D_3 = C_3 + \frac{C_3 - C_3}{2^6 - 1} = 0.69314$$ (C_k berorde 6, jadi $q = 6$)

Tabel Romberg:

k	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
0	0.75000			
1	0.70833	0.69445		
2	0.69702	0.69325	0.69317	
3	0.69412	0.69315	0.69314	**0.69314**

Jadi, $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \approx 0.69314$

(Bandingkan dengan solusi sejatie $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = 0.693145$) ■

6.6.3 Ekstrapolasi Aitken

Kita telah membahas ekstrapolasi Richardson yang dapat diringkas sebagai berikut:

Jika $I = \int_a^b f(x)dx \approx I(h) + Ch^q$

yang dalam hal ini,

h = lebar tiap upaselang atau pias (atau jarak antar titik)
C dan q adalah konstanta dengan q diketahui (C dapat dieliminir)
$I(h)$ adalah hampiran nilai nilai I
Ch^q adalah galat dari hampiran nilai I

maka

$$J = I(h) + \frac{1}{2^q - 1} [\, I(h) - I(2h)]$$

adalah perkiraan nilai integrasi yang lebih baik (*improve*) daripada I.

Timbul persoalan, bagaimana jika q tidak diketahui? Untuk kasus ini kita gunakan tiga buah perkiraan nilai I, yaitu $I(h)$, $I(2h)$, dan $I(4h)$:

$$J = I(h) + Ch^q \quad \rightarrow \quad C = \frac{J - I(h)}{h^q} \qquad \text{(P.6.49)}$$

$$J = I(2h) + C(2h)^q \quad \rightarrow \quad C = \frac{J - I(2h)}{(2h)^q} \qquad \text{(P.6.50)}$$

$$J = I(4h) + C(4h)^q \quad \rightarrow \quad C = \frac{J - I(4h)}{(4h)^q} \qquad \text{(P.6.51)}$$

Eliminasikan nilai C dan q dengan menyamakan persamaan (P.6.49) dan (P.6.50)

$$\frac{J - I(h)}{h^q} = \frac{J - I(2h)}{(2h)^q}$$

$$\frac{J - I(h)}{J - I(2h)} = \frac{h^q}{2^q h^q} = \frac{1}{2^q} \tag{P.6.52}$$

dan menyamakan persamaan (P.6.50) dan (P.6.51)

$$\frac{J - I(2h)}{J - I(4h)} = \frac{(2h)^q}{(4h)^q} = \frac{1}{2^q} \tag{P.6.53}$$

Persaman (P.6.52) sama dengan persamaan (P.6.53):

$$\frac{J - I(h)}{J - I(2h)} = \frac{J - I(2h)}{J - I(4h)} \tag{P.6.54}$$

kali silangkan kedua ruas persamaan (P.6.54)

$$J^2 - J\,I(h) - J\,I(4h) + I(h)\,I(4h) = J^2 - 2J\,I(2h) + [I(2h)]^2$$

$$J = \frac{I(h)\,I(4h) - [I(2h)]^2}{I(h) - 2\,I(2h) + I(4h)}$$

atau

$$J = I(h) - \frac{[I(h) - I(2h)]^2}{I(h) - 2\,I(2h) + I(4h)} \tag{P.6.55}$$

Persamaan (P.6.55) ini dinamakan persamaan **ekstrapolasi Aitken** [NOB72].

Sekarang, tinjau kembali:

$$\begin{array}{l} J = I(h) + Ch^q \\ J = I(2h) + C(2h)^q \qquad - \\ \hline 0 = I(h) - I(2h) + Ch^q - C(2h)^q \\ I(h) - I(2h) = C(2h)^q - Ch^q \end{array} \tag{P.6.56}$$

$$\begin{array}{l} J = I(2h) + C(2h)^q \\ J = I(4h) + C(4h)^q \qquad - \\ \hline 0 = I(2h) - I(4h) + C(2h)^q - C(4h)^q \\ I(2h) - I(4h) = C(4h)^q - C(2h)^q \end{array} \tag{P.6.57}$$

Bagi persamaan (P.6.57) dengan persamaan (P.6.56):

$$\frac{I(2h)-I(4h)}{I(h)-I(2h)} = \frac{C(2h)^q - C(4h)^q}{Ch^q - C(2h)^q} = 2^q \qquad \text{(P.6.58)}$$

Besaran *C* pada persamaan (P.6.58) dapat dihilangkan menjadi

$$t = \frac{I(2h)-I(4h)}{I(h)-I(2h)} = 2^q \qquad \text{(P.6.59)}$$

Tinjau kembali persamaan (P.6.55) yang dapat ditulis ulang sebagai

$$J = I(h) - \frac{I(h)-I(2h)}{\dfrac{I(h)-2\,I(2h)+I(4h)}{I(h)-2\,I(h)}}$$

$$= I(h) - \frac{I(h)-I(2h)}{\dfrac{I-I(2h)+I(4h)}{I(h)-I(2h)}}$$

$$= I(h) - \frac{I(h)-I(2h)}{1-t}$$

$$= I(h) + \frac{I(h)-I(2h)}{t-1}$$

Jadi,

$$J = I(h)+\frac{I(h)-I(2h)}{t-1} \qquad \text{(P.6.60)}$$

yang "mirip" dengan persamaan ekstrapolasi Richardson. Ekstrapolasi Aitken akan tepat sama dengan ektrapolasi Richardson jika nilai teoritis

$$t = 2^q$$

tepat sama dengan nilai empirik

$$t = \frac{I(2h)-I(4h)}{I(h)-I(2h)}$$

Perbedaan antara kedua metode ekstrapolasi muncul bergantung kepada apakah kita mengetahui nilai *q* atau tidak. Hal ini diringkas dalam prosedur berikut:

Prosedur praktis:

1. Hitung $I(4h)$, $I(2h)$, dan $I(h)$
2. Hitung nilai empirik $t = \dfrac{I(2h) - I(4h)}{I(h) - I(2h)}$
3. Hitung nilai teoritik $t = 2^q$ (bila q diketahui)
4. Jika t teoritik $\neq$ t empirik harus kita bertanya "mengapa?"
5. Gunakan ekstrapolasi Aitken (P.6.59) dengan nilai empirik t atau ekstrapolasi Rihardson (P.6.45) dengan q.

Contoh 6.10

[NOB72] Hitung $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ sampai lima angka bena dengan menggunakan kaidah 1/3 Simpson (Gunakan h = 1/8)!

Penyelesaian:

$4h = 4 \times 1/8 = 1/2 \quad \rightarrow \quad I(4h) = I(1/2) = \dfrac{1/2\,I}{3}\,(f_0 + 4f_{1/2} + f_1)$

$= 1/6\,(0 + 4\sqrt{(1/2)} + \sqrt{1})$

$= 0.63807$

$2h = 2 \times 1/8 = 1/4 \quad \rightarrow \quad I(2h) = I(1/4) = \dfrac{1/4}{3}\,(f_0 + 4f_{1/4} + 2f_{1/2} + 4f_{3/4} + f_1)$

$= 1/12\,(0 + 4\sqrt{1/4} + 2\sqrt{(1/2)} + 4\sqrt{(3/4)} + 1)$

$= 0.65653$

$h = 1/8 \rightarrow I(h) = I(1/8) = \dfrac{1/8}{3}\,(f_0 + 4f_{1/8} + 2f_{2/8} + 4f_{3/8} + 2f_{4/8} + 4f_{5/8} + 2f_{6/8} + 4f_{7/8} + f_1)$

$= 0.66308$

$$\text{empirik} \rightarrow \quad t = \frac{I(2h) - I(4h)}{I(h) - I(2h)} = \frac{I(1/4) - I(1/2)}{I(1/8) - I(1/4)} = 2.82$$

$$\text{teoritik} \rightarrow \quad t = 2^q = 2^4 = 16 \text{ (yang diharapkan)}$$

Mengapa t teoritik tidak sama dengan t empirik? Perbedaan ini timbul sebab fungsi turunan $\sqrt{x}$ tidak terdefinisi di $x = 0$ (singular). Karena itu, nilai t teoritik (t = 16) tidak dapat dipegang, sehingga ekstrapolasi Richardson (P.6.46) tidak dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai integrasi yang lebih baik. Jadi, gunakan ekstrapolasi Aitken (P.6.60) dengan nilai t empirik untuk menghitung perkiraan nilai integrasi yang lebih baik:

$$
\begin{aligned}
J &= I(1/8) + \frac{I(1/8) - I(1/4)}{2.82 - 1} \\
&= 0.66308 + \frac{1}{1.82}\,[0.66308 - 0.65653] \\
&= 0.66668
\end{aligned}
$$

Bandingkan solusi ini dengan solusi sejatinya = 0.66667. Perhatikan, kalau kita menggunakan ekstrapolasi Richardson dengan t teoritik (t = 16), maka solusinya

$$
\begin{aligned}
J &= I(1/8) + \frac{I(1/8) - I(1/4)}{2^4 - 1} \\
&= 0.66308 + \frac{1}{15}\,[0.66308 - 0.65653] \\
&= 0.66352
\end{aligned}
$$

yang cukup berbeda jauh dengan solusi eksak. Karena itu, hasil integrasi dengan ekstrapolasi Aitken yang dapat diterima, yaitu 0.66668. ■

6.7 Integral Ganda

Dalam bidang teknik, integral sering muncul dalam bentuk integral ganda dua (atau lipat dua) atau integral ganda tiga (lipat tiga). Misalkan kita tinjau untuk integral lipat dua. Integral lipat dua didefinisikan sebagai

$$
\iint_A f(x, y)\,dA = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x, y)\,dy\Big]dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x, y)\,dx\Big]dy \qquad \text{(P.6.61)}
$$

Tafsiran geometri dari integral ganda adalah menghitung volume ruang di bawah permukaan kurva $f(x,y)$ yang alasnya adalah berupa bidang yang dibatasi oleh garis-garis $x = a$, $x = b$, $y = c$, dan $y = d$. Volume benda berdimensi tiga adalah

V = luas alas × tinggi

Kaidah-kaidah integrasi numerik yang telah kita bahas dapat dipakai untuk menghitung integral ganda. Jika pada fungsi dengan satu peubah, $y = f(x)$, luas daerah dihampiri dengan pias-pias yang berbentuk segiempat atau trapesium, maka pada fungsi dengan dua peubah, $z = f(x, y)$, volume ruang dihampiri dengan balok-balok yang berbentuk segiempat atau trapesium.

Solusi integral lipat dua diperoleh dengan melakukan integrasi dua kali, pertama dalam arah x (dalam hal ini nilai, nilai y tetap), selanjutnya dalam arah y (dalam hal ini, nilai x tetap), atau sebaliknya. Dalam arah x berarti kita menghitung luas alas benda, sedangkan dalam arah y berarti kita mengalikan alas dengan tinggi untuk memperoleh volume benda. Tinggi benda dinyatakan secara tidak langsung dengan koefisien-koefisien w_i pada persamaan (P.6.40).

Misalkan integrasi dalam arah x dihitung dengan kaidah trapesium, dan integrasi dalam arah y dihitung dengan kaidah Simpson 1/3. Maka

$$\int_c^d \int_a^b [f(x, y)dx]dy \approx \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{i=1}^{n} w_i f_{ij}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{\Delta y}{3} \Big[\frac{\Delta x}{2} (f_{0,0} + 2f_{1,0} + 2f_{2,0} + ... + 2f_{n-1,0} + f_{n,0}) \ + \\
&+ 4 \times \frac{\Delta x}{2} (f_{0,1} + 2f_{1,1} + 2f_{2,1} + ... + 2f_{n-1,1} + f_{n,1}) \\
&+ 2 \times \frac{\Delta x}{2} (f_{0,2} + 2f_{1,2} + 2f_{2,2} + ... + 2f_{n-1,2} + f_{n,2}) \\
&\ldots \\
&+ 2 \times \frac{\Delta x}{2} (f_{0,m-2} + 2f_{1,m-2} + 2f_{2,m-2} + ... + 2f_{n-1,m-2} + f_{n,m-2}) \\
&+ 4 \times \frac{\Delta x}{2} (f_{0,m-1} + 2f_{1,m-1} + 2f_{2,m-1} + ... + 2f_{n-1,m-1} + f_{n,m-1}) \\
&+ \frac{\Delta x}{2} (f_{0,m} + 2f_{1,m} + 2f_{2,m} + ... + 2f_{n-1,0} + f_{n,m}) \Big]
\end{aligned} \qquad \text{(P.6.62)}$$

dengan

Δx = jarak antar titik dalam arah x,
Δy = jarak antar titik dalam arah y,
n = jumlah titik diskrit dalam arah x,
m = jumlah titik diskrit dalam arah y.

Contoh 6.11

Diberikan tabel *f(x,y)* sebagai berikut:

x \ y	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.5	0.990	1.524	2.045	2.549	3.031
2.0	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841

Hitung $\int_{0.2}^{0.6} \int_{1.5}^{3.0} f(x, y) dxdy$ [GER85]

Penyelesaian:

Misalkan

- dalam arah x kita gunakan kaidah trapesium
- dalam arah y kita gunakan kaidah Simpson 1/3

Dalam arah x (y tetap):

$$y = 0.2 \quad ; \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.2)dx$$

$$\approx \Delta x/2 \ (f_{0,0} + 2f_{1,0} + 2f_{2,0} + f_{3,0})$$
$$\approx 0.5/2 \ (0.990 + 2 \times 1.658 + 2 \times 2.520 + 4.090)$$
$$\approx 3.3140$$

$$y = 0.3 \quad ; \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.3)dx$$

$$\approx \Delta x/2 \ (f_{0,1} + 2f_{1,1} + 2f_{2,1} + f_{3,1})$$
$$\approx 0.5/2 \ (1.524 + 2 \ (2.384 + 2 \times 3.800 + 6.136)$$
$$\approx 5.0070$$

$$y = 0.4 ; \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.4)dx \approx 6.6522$$

$$y = 0.5; \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.5)dx \approx 8.2368$$

$$y = 0.6; \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dx \approx \int_{1.5}^{3.0} f(x, 0.6)dx \approx 9.7345$$

Dalam arah y :

$$\int_{0.2}^{0.6} f(x, y)dy \approx \Delta y/3\,(3.3140 + 4\times 5.0070 + 2\times 6.6522 + 4\times 8.2368 + 9.7435)$$

$$\approx 0.1/3\,(3.3140 + 4\times 5.0070 + 2\times 6.6522 + 4\times 8.2368 + 9.7435)$$

$$\approx 2.6446$$

Jadi,

$$\int_{0.2}^{0.6} \int_{1.5}^{3.0} f(x, y)dxdy \approx 2.6446$$ ■

Cara perhitungan integral ganda dua di atas dapat dirampatkan (*generalized*) untuk integral ganda tiga

$$\iiint_R f(x, y, z)dR$$

maupun integral ganda yang lebih tinggi.

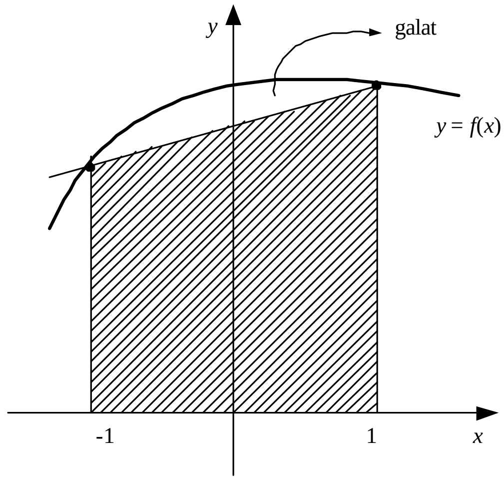
6.8 Kuadratur Gauss

Sampai saat ini kita telah membahas kaidah integrasi yang berbasis titik-titik data diskrit dengan metode Newton-Cotes. Sebelum melakukan perhitungan integrasi, kita harus membentuk tabulasi titik-titik diskrit yang berjarak sama. Titik-titik diskrit tersebut harus berawal dan berakhir di ujung-ujung selang a dan b. Trapesium-trapesium yang menghampiri dearh integarsi harus berawal dan berakhir di ujung-ujung selang tersebut. Batasan ini mengakibatkan galat yang dihasilkan dengan mekanisme ini ternyata cukup besar.

Misalnya bila kita menggunakan kaidah trapesium untuk menghitung $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, maka daerah integrasi dalam selang [-1, 1] (Gambar 6.14) dihampiri dengan sebuah trapesium yang luasnya adalah

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[\,f(1) + f(-1)] \approx f(1) + f(-1) \qquad \text{(P.6.63)}$$

dengan h = (1-(-1)) = 2.



Gambar 6.14 Integral $_{-1}\int^{1} f(x)dx$ dihampiri dengan trapesium

Perhatikan kembali bahwa persamaan (P.6.63) dapat ditulis sebagai

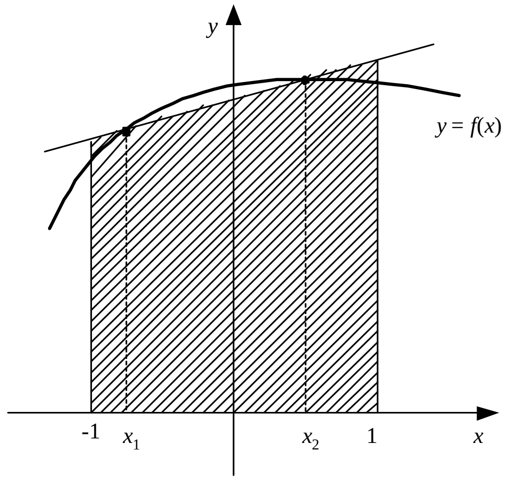
$$I \approx c_1 f(a) + c_2 f(b) \qquad \text{(P.6.64)}$$

dengan a = -1, b = 1, $c_1 = c_2 = h/2 = 2/2 = 1$.

Pendekatan integrasi yang berbeda dengan metode Newton-Cotes dikembangkan oleh Gauss dan dinamakan metode **kuadratur Gauss** (*Gaussian Quadrature*). Dengan metode kuadratur Gauss, batasan-batasan yang terdapat pada metode Newton-Cotes kuadratur dihilangkan. Di sini kita tidak perlu lagi menentukan titik-titik diskrit yang berjarak sama, tetapi nilai integrasi numerik cukup diperoleh dengan menghitung nilai fungsi *f(x)* pada beberapa titik tertentu. Untuk memberi gambaran tentang kuadratur Gauss, perhatikan Gambar 6.15. Sebuah garis lurus ditarik menghubungkan dua titik sembarang pada kurva $y = f(x)$. Titik-titik tersebut diatur sedemikian sehingga garis lurus tersebut menyeimbangkan galat positif dan galat negatif. Luas daerah yang dihitung sekarang adalah luas daerah di bawah garis lurus, yang dinyatakan sebagai

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \qquad \text{(P.6.65)}$$

dengan c_1 , c_2 , x_1 , dan x_2 adalah sembarang nilai. Persamaan (P.6.65) ini dinamakan persamaan kuadratur Gauss. Perhatikan bahwa bila dipilih x_1 = -1 , x_2 =1, dan $c_1 = c_2 = 1$, maka persamaan kuadratur Gauss (P.6.65) menjadi kaidah trapesium (P.6.63). Jadi, kaidah trapesium memenuhi persamaan kuadratur Gauss.



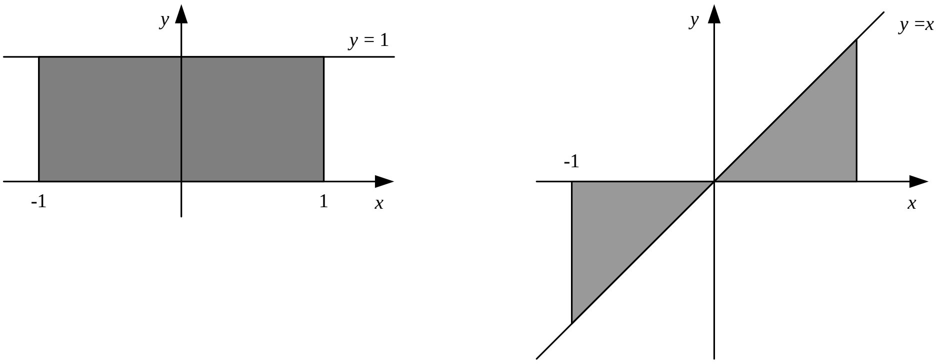
Gambar 6.15 Integral $_{-1}\int^{1} f(x)dx$ dihampiri dengan kuadratur Gauss

Persamaan (P.6.65) mengandung empat buah peubah yang tidak diketahui (*unknown*), yaitu x_1 , x_2 , c_1 , dan c_2. Kita harus memilih x_1, x_2, c_1, dan c_2 sedemikian sehingga galat integrasinya minimum. Karena ada empat buah peubah yang tidak diketahui, maka kita harus mempunyai empat buah persamaan simultan yang mengandung x_1, x_2, c_1, dan c_2.

Di atas telah dikatakan bahwa kaidah trapesium bersesuaian dengan kuadratur Gauss. Dapat dilihat bahwa nilai integrasi numerik dengan kaidah trapesium akan tepat (galatnya = 0) untuk fungsi tetap dan fungsi lanjar. Misalnya untuk $f(x) = 1$ dan $f(x) = x$. Perhatikan Gambar 6.16. Dari dua buah fungsi tersebut, diperoleh dua persamaan:

$$f(x) = 1 \rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = x \Big|_{x=-1}^{x=1} = 1 - (-1) = 2 = c_1 + c_2 \qquad \text{(P.6.66)}$$

$$f(x) = x \rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = {}^{1}/_{2}\, x^2 \Big|_{x=-1}^{x=1} = {}^{1}/_{2}\,(1)^2 - {}^{1}/_{2}\,(-1)^2 = 0 = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad \text{(P.6.67)}$$



(a) $\int_{-1}^{1} dx$ (b) $\int_{-1}^{1} x dx$

Gambar 6.16 Integrasi yang bernilai sejati dengan kaidah trapesium

Kita memerlukan dua buah persamaan lagi agar x_1, x_2, c_1, dan c_2 dapat ditentukan. Dari penalaran bahwa kaidah trapesium sejati untuk fungsi tetap dan fungsi lanjar, maka penalaran ini juga kita perluas dengan menambahkan anggapan bahwa integrasinya juga sejati untuk

$f(x) = x^2$ dan $f(x) = x^{3.}$

Sekarang kita menadapatkan dua persamaan tambahan, yaitu

$$f(x) = x^2 \rightarrow \int_{-1}^{1} x dx = {}^1/_3\, x^3 \Big|_{x=-1}^{x=1} = 2/3 = c_1 x_1^{\,2} + c_2 x_2^{\,2} \qquad \text{(P.6.68)}$$

dan

$$f(x) = x^3 \rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = 1/4\, x^4 \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0 = c_1 x^3 + c_2 x^3 \qquad \text{(P.6.69)}$$

Sekarang, kita sudah mempunyai empat buah persamaan simultan

$$\begin{aligned} c_1 \quad + \; c_2 \quad &= 2 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 &= 0 \\ c_1 x_1^{\,2} + c_2 x_2^{\,2} &= 2/3 \\ c_1 x^3 + c_2 x^3 &= 0 \end{aligned}$$

yang bila dipecahkan menghasilkan:

$c_1 = c_2 = 1$
$x_1 = 1/\sqrt{3} = 0.577350269$
$x_2 = -1/(3 = -0.577350269$

Jadi,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3}) \qquad \text{(P.6.70)}$$

Persamaan (P.6.70) dinamakan **kaidah Gauss-Legendre 2-titik**. Dengan kaidah ini, menghitung integral $f(x)$ di dalam selang [-1, 1] cukup hanya dengan mengevaluasi nilai fungsi f di $x = 1/\sqrt{3}$ dan di $x = -1\sqrt{3}$.

Transformasi $\int_a^b f(x)\,dx$ Menjadi $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$

Untuk menghitung integrasi

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

kita harus melakukan transformasi:

a. selang [a, b] menjadi selang [-1, 1]
b. peubah x menjadi peubah t
c. diferensial dx menjadi dt

Selang [a, b] dan [-1, 1] dilukiskan oleh diagram garis berikut:

Dari kedua diagram garis itu kita membuat perbandingan:

$$\Leftrightarrow \frac{x-a}{b-a} = \frac{t-(-1)}{1-(-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-a}{b-a} = \frac{t+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2a = (t + 1)(b - \mathrm{a})$$
$$\Leftrightarrow 2x = (t + 1)(b - a) + 2a$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{bt - at + b - a + 2a}{2}$$

$$= \frac{a + b + bt - at}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{(a+b) + (b-a)t}{2} \qquad \text{(P.6.71)}$$

Dari persaman (P.6.71), diperoleh diferensialnya

$$dx = \frac{b-a}{2}\, dt \qquad \text{(P.6.72)}$$

Transformasikan $\int_a^b f(x)dx$ menjadi $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ dilakukan dengan menyulihkan (P.6.71) dan (P.6.72) ke dalam $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f[\frac{(a+b)+(b-a)t}{2}]\frac{(b-a)}{2}dt = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f[\frac{(a+b)+(b-a)t}{2}]dt$$

Contoh 6.12

[MAT93] Hitung integral

$$\int_1^2 (x^2 + 1)dx$$

dengan kaidah Gauss-Legendre 2-titik.

Penyelesaian:

$a = 1$, $\quad b = 2$

$$x = \frac{(1+2) + (2-1)t}{2} = 1.5 + 0.5\, t$$

$$dx = \frac{2-1}{2}\, dt = 0.5\, dt$$

Transformasikan $\int_{1}^{2} f(x)dx$ menjadi $\int_{-1}^{1} f(t)dt$:

$$\int_{1}^{2} (x^2 + 1)dx = \int_{-1}^{1} [(1.5 + 0.5t)^2 + 1]0.5dt = 0.5 \int_{-1}^{1} [(1.5 + 0.5t)^2 + 1]dt$$

Jadi, dalam hal ini

$$f(t) = (1.5 + 0.5\,t)^2 + 1$$

maka

$$f(1/\surd 3) = (1.5 + 0.5 \times 1/\surd 3)^2 + 1) = 4.1993587371$$
$$f(-1/\surd 3) = (1.5 + 0.5 \times -1/\surd 3)^2 + 1) = 2.4673079295$$

Dengan demikian

$$\int_{1}^{2} (x^2 + 1)dx = 0.5 \int_{-1}^{1} (1.5 + 0.52t)^2 + 1)\,dt \approx 0.5 \times \{f(1/\surd 3) + f(-1/\surd 3)\}$$

$$\approx 3.33333333$$

Nilai integrasi sejatinya adalah:

$$\int_{1}^{2} (x^2 + 1)dx = {}^1/_3\, x^3 + x \Big|_{x=1}^{x=2} = (8/3 + 2) + (1/3 + 1) = (7/3 + 1)$$

$$= 3.333333333$$

yang untuk kasus ini tepat sama sampai 10 angka bena dengan solusi hampirannya.

Program 6.5 : Integrasi $\int_{1}^{2} (x^2 + 1)dx$ dengan kaidah Gauss-Legendre 2-Titik

```
procedure Gauss_Legendre_2_Titik(a, b: real; var I : real);
{ Menghitung a∫b f(x)dx dengan metode Gauss-Legendre 2-Titik
  K.Awal : harga a dan b sudah terdefenisi
  K.Akhir: I berisi hampiran integrasi
}
var
   f1, f2 : real;

   function f(t:real):real;
   { menghitung nilai f(t) untuk harga t yang telah terdefinisi }
   var
      x:real;
   begin
      x:=((a+b) + (b-a)*t)/2;  {transformasi peubah}
      f:=x*x + 1;
   end;
```

```
begin
   f1:=f(sqrt(3)/3);
   f2:=f(-sqrt(3)/3);
   I:=(b-a)/2 * (f1 + f2);
end;
```

Dibandingkan dengan metode Newton-Cotes (trapesium, 1/3 Simpson, dll), kaidah Gauss-Legendre 2-titik lebih sederhana dan lebih mangkus dalam operasi aritmetika, karena Gauss-Legendre 2-titik hanya membutuhkan dua buah evaluasi fungsi. Selain itu, ketelitiannya lebih tinggi dibandingkan dengan metode Newton-Cotes. Namun, kaidah Gauss-Legendre tidak dapat digunakan jika fungsi *f(x)* tidak diketahui secara eksplisit, karena kita tidak dapat melakukan transformasi $\int_a^b f(x)dx$ menjadi $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ Untuk kasus seperti ini, jelas metode Newton-Cotes sebagai jalan keluarnya.

Kaidah Gauss-Legendre 3-Titik

Metode Gauss-Legendre 3-Titik dapat ditulis sebagai

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dt \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

Parameter x_1 , x_2 , x_3 , c_1 , c_2 , dan c_3 dapat ditemukan dengan membuat penalaran bahwa kuadratur Gauss bernilai tepat untuk 6 buah fungsi berikut:

$f(x) = 1$; $f(x) = x$; $f(x) = x^2$
$f(x) = x^3$; $f(x) = x^4$; $f(x) = x^5$

Dengan cara yang sama seperti pada penurunan kaidah Gauss-Legendre 2-titik, diperoleh 6 buah persaman simultan yang solusinya adalah

$c_1 = 5/9$; $x_1 = -\sqrt{3/5}$
$c_2 = 8/9$; $x_2 = 0$
$c_3 = 5/9$; $x_1 = \sqrt{3/5}$

Jadi,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9} f\left[-\sqrt{(3/5)}\right] + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left[\sqrt{(3/5)}\right] \qquad \text{(P.6.73)}$$

Kaidah Gauss-Legendre *n*-Titik

Penurunan kaidah Gauss-Legendre 2-titik dan Gauss-Legendre 3-titik dapat dirampatkan untuk menghasilkan kaidah Gauss-Legendre n-titik

$$\int_{-1}^{1} f(x)dt \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n) \qquad \text{(P.6.74)}$$

Nilai-nilai c_i dan x_i dapat dilihat pada tabel berikut ini:

Metode Gauss-Legendre n-titik $\int_{-1}^{1} f(x)dt \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n)$			
n	**Faktor bobot**	**Argumen fungsi**	**Galat pemotongan**
2	c_1 = 1.000000000 c_2 = 1.000000000	x_1 = -0.577350269 x_2 = 0.577350269	$\approx f^{(4)}(c)$
3	c_1 = 0.555555556 c_2 = 0.888888889 c_3 = 0.555555556	x_1 = -0.774596669 x_2 = 0 x_1 = 0.774596669	$\approx f^{(6)}(c)$
4	c_1 = 0.347854845 c_2 = 0.652145155 c_3 = 0.652145155 c_3 = 0.347854845	x_1 = -0.861136312 x_2 = -0.339981044 x_3 = 0.339981044 x_4 = 0.861136312	$\approx f^{(8)}(c)$
5	c_1 = 0.236926885 c_2 = 0.478628670 c_3 = 0.568888889 c_4 = 0.478628670 c_5 = 0.236926885	x_1 = -0.906179846 x_2 = -0.538469310 x_3 = 0 x_4 = 0.538469310 x_5 = 0.906179846	$\approx f^{(10)}(c)$
6	c_1 = 0.171324492 c_2 = 0.360761573 c_3 = 0.467913935 c_4 = 0.467913935 c_5 = 0.360761573 c_6 = 0.171324492	x_1 = -0.932469514 x_2 = -0.661209386 x_3 = -0.238619186 x_4 = 0.238619186 x_5 = 0.661209386 x_6 = 0.932469514	$\approx f^{(12)}(c)$

6.9 Contoh Soal Terapan

Seorang penerjun payung terjun dari sebuah pesawat. Kecepatan penerjun sebagai fungsi dari waktu adalah [CHA91]:

$$v(t) = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-(c/m)\,t} \right)$$

yang dalam hal ini

v = kecepatan penerjun dalam m/dt
g = tetapan gravitasi = 9.8 m/dt^2
m = massa penerjun = 68.1 kg
c = koefisien tahanan udara = 12.5 kg/detik

Misalkan kita ingi mengetahui seberapa jauh penerjun telah jatuh seteleh waktu tertentu t. Karena kecepatan merupakan turunan pertama dari fungsi jarak, maka jarak penerjun dari titik terjun (t = 0) adalah :

$$d = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})dt$$

Hitung seberapa jauh penerjun telah jatuh setelah waktu t =10 detik dengan bermacam-macam metode integrasi numerik.

Penyelesaian:

Persoalan kita adalah menghitung integrasi

$$d = \int_0^{10} \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})dt$$

dengan

v = kecepatan penerjun dalam m/dt
g = percepatan gravitasi = 9.8 m/dt^2
m = massa penerjun = 68.1 kg
c = koefisien tahanan udara = 12.5 kg/detik

Nilai d dengan bermacam-macam metode integrasi numerik diringkas dalam tabel berikut:

Metode Integrasi	d (meter)	Keterangan
Trapesium	289.4309571611	n = 128
Titik-tengah	289.4372411810	n = 128
Simpson 1/3	289.4351464539	n = 128
Simpson 3/8	289.4351465013	n = 243
Romberg	289.4351465113	n = 128
Gauss-Legendre 2-Titik	290.0144778200	
Gauss-Legendre 3-Titik	289.4392972900	
Gauss-Legendre 4-Titik	289.4351622600	

Dari tabel di atas terlihat perbaikan hasil integrasi dimulai setelah kaidah titik-tengah. Mulai dari kaidah Simpson 1/3 sampai metode Romberg, nilai integrasi semakin diperbaiki. Pada contoh ini, hasil integrasi dengan kaidah Simpson 3/8 tidak dapat dibandingkan karena jumlah pias n tidak sama dengan kaidah integrasi lainnya, keculai jika kita menggunakan n yang sama (n genap tetapi merupakan kelipatan tiga). Sedangkan hasil integrasi dengan kuadratur Gauss memperlihatkan perbaikan dengan semakin tingginya orde metode.

Kebutuhan yang paling mendasar bagi menusia ialah bagaimana mengatasi
keterasingannya, untuk meningggalkan
penjara kesendiriannya.
(Erich Fromm - The Art of Loving)

Soal Latihan

1. Diketahui $f(x) = (4t - t^3)\exp(t^2)$, $0 \le x \le 2$ dan $n = 256$. Hitunglah $\int_0^2 f(x)\, dx$

   dengan:

   (a) kaidah trapesium
   (b) kaidah Simpson 1/3
   (c) kaidah titik-tengah
   (d) metode Romberg
   (e) kaidah Gauss-Legendre 3-titik dan Gauss-Legendre 4-titik.

2. Diketahui $f(x) = x^2 \cos(x^2)$, $1.5 \le x \le 2.5$ dan h = 0.1. Hitunglah $\int_{1.5}^{2.5} f(x)\, dx$

   dengan:

   (a) kaidah trapesium
   (b) kaidah Simpson 1/3
   (c) kaidah titik-tengah
   (d) metode Romberg
   (e) kaidah Gauss-Legendre 3-titik dan Gauss-Legendre 4-titik.

3. Turunkan rumus galat kaidah titik-tengah dan galat totalnya.

4. Turunkan rumus galat kaidah Simpson 3/8 dan galat totalnya.

5. Tentukan n (jumlah upaselang atau pias) sehingga kaidah trapesium memberikan nilai integrasi

   $$\int_{-1}^{1} \cos(2x)dx$$

   kurang dari 0.000001.

6. (a) Dengan menerapkan ekstrapolasi Richardson, turunkan kaidah Boole untuk

   $\int_0^{4h} f(x)dx$ bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah Simpson 1/3.

   (b) Dengan menyatakan $I \approx I(h) + Ch^q$, turunkan rumus ekstrapolasi Richardson untuk menghitung $\int_0^{3h} f(x)\, dx$ dengan menggunakan titik-titik selebar h dan $3h$.

(c) Berdasarkan rumus ekstrapolasi Richardson pada jawaban (b) di atas, turunkan kaidah 3/8 Simpson bila $I(h)$ dan $I(3h)$ dihitung dengan kaidah titik tengah.

7. (a) Dengan menyatakan $I \approx I(h) + Ch^q$, turunkan rumus ekstrapolasi Richardson untuk menghitung $\int_0^{3h} f(x)\, dx$ dengan menggunakan titik-titik selebar h dan $3h$.

(b) Dengan menerapkan ekstrapolasi Richardson pada rumus (a), turunkan kaidah integrasi baru yang galatnya berorde $O(h^7)$ untuk

$$\int_0^{6h} f(x)dx$$

bila $I(h)$ dan $I(3h)$ dihitung dengan kaidah Simpson 3/8.

(c) Berdasarkan rumus ekstrapolasi Richardson pada jawaban (b) di atas, turunkan kaidah Simpson 3/8 bentuk lain bila $I(h)$ dan $I(3h)$ dihitung dengan kaidah titik tengah.

8. Rumus

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,(x-1)^2\, dx = pf(a) + qf(a)$$

akan tepat untuk polinom derajat ≤ 3. Tentukan p, q, a, dan b.

9. Ubahlah bentuk integrasi di bawah ini agar tidak singular lagi :

(i) $\int_{-1}^{0} \cos(x)/x^{2/3}\, dx$

(ii) $\int_{0}^{1} dx/(1-x)^{1/2}\, dx$

(iii) $\int_{-1}^{2} (3x^2-2x)/(x^3 - x^2 + 2)\, dx$

10. Nilai integrasi untuk fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ singular dekat $x = 0$ dan tidak singular untuk x yang jauh dari nol. Untuk membuktikan pernyataan ini, lakukan perhitungan tangan (tanpa komputer) sampai 5 angka bena pada:

    (a) $\int_{1}^{1.30} \sqrt{x}\, dx$, kaidah 1/3 Simpson, $h = 0.05$. Bandingkan dengan nilai integrasi sejatinya.

    (b) $\int_{0}^{0.30} \sqrt{x}\, dx$, kaidah Simpson 1/3, $h = 0.05$. Bandingkan dengan nilai integrasi sejatinya.

    Sekarang, ubahlah fungsi $f(x)$ sehingga tidak singular lagi, lalu hitung kembali integrasi soal (a) dan (b) di atas.

11. Hitunglah $\int_{0}^{1} \int_{0}^{2} e^{y} \cos(x)\, dx\, dy$:

    (a) Gunakan kaidah Simpson 1/3 untuk kedua arah, $\Delta x = \Delta y = 0.1$
    (b) Gunakan kaidah Gauss-Legendre 4-titik untuk kedua arah

12. Susunlah rumus integrasi numerik dari bentuk berikut :

    $$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = af(-2) + bf(0) + cf(2)$$

    yang nilai integrasinya tepat untuk polinom $f(x)$ derajat ≤ 2

13. Perlihatkan bahwa galat kaidah Gauss-Legendre 2-titik sebanding dengan $f^{(4)}(c)$, yang dalam hal ini $-1 < c < 1$. (Petunjuk : gunakan bantuan deret Taylor).

14. Ubahlah bentuk integrasi di bawah ini agar tidak singular lagi :

    (i) $\int_{-1}^{0} \cos(x)/x^{2/3}\, dx$

    (ii) $\int_{0}^{1} dx/(1-x)^{1/2}\, dx$

    (iii) $\int_{-1}^{2} (3x^2-2x)/(x^3 - x^2 + 2)\, dx$

15. Hitunglah secara analitis $\int_a^b x^3 \, dx$. Nyatakan jawaban anda dalam *a* dan *b*.

    Perlihatkan bahwa bila integral tersebut diselesaikan dengan kaidah Simpson1 1/3 hasilnya sama dengan nilai integrasi sejatinya.

16. Hitunglah $\int_0^1 \int_1^2 x \, e^y \, dx \, dy$:

    (a) Gunakan kaidah Simpson 1/3 untuk kedua arah, $\Delta x = \Delta y = 0.1$
    (b) Gunakan kaidah Gauss-Legendre 4 titik untuk kedua arah.