Bab 5

Interpolasi dan Regresi

Jangan ikuti kemana jalan menuju,
tetapi buatlah jalan sendiri dan tinggalkan jejak[1]
(Anonim)

Para rekayasawan dan ahli ilmu alam sering bekerja dengan sejumlah data diskrit (yang umumnya disajikan dalam bentuk tabel). Data di dalam tabel mungkin diperoleh dari hasil pengamatan di lapangan, hasil pengukuran di laboratorium, atau tabel yang diambil dari buku-buku acuan.

Sebagai ilustrasi, sebuah pengukuran fisika telah dilakukan untuk menentukan hubungan antara tegangan yang diberikan kepada baja tahan-karat dan waktu yang diperlukan hingga baja tersebut patah. Delapan nilai tegangan yang berbeda dicobakan, dan data yang dihasilkan adalah [CHA91]:

Tegangan yang diterapkan, x, kg/mm^2	5	10	15	20	25	30	35	40
Waktu patah, y, jam	40	30	25	40	18	20	22	15

Masalah yang cukup sering muncul dengan data tabel adalah menentukan nilai di antara titik-titik diskrit tersebut (tanpa harus melakukan pengukuran lagi). Misalnya dari tabel pengukuran di atas, rekayasawan ingin mengetahui waktu patah y jika tegangan x yang diberikan kepada baja adalah 12 kg/mm^2. Masalah ini tidak bisa langsung dijawab karena fungsi yang menghubungkan peubah y dengan peubah x tidak diketahui. Salah satu solusinya adalah mencari fungsi yang mencocokkan (*fit*) titik-titik data di dalam tabel tabel. Pendekatan seperti ini di dalam metode numerik dinamakan **pencocokan kurva** (*curve fitting*). Fungsi yang diperoleh dengan pendekatan ini merupakan fungsi hampiran, karena itu nilai fungsinya tidak setepat nilai sejatinya. Namun, cara ini dalam praktek

[1] Terjemahan bebas dari kalimat: *"Do not follow where the path may lead. Go, instead, where there is no path and leave a trail"*

rekayasa sudah mencukupi karena rumus yang benar-benar menghubungkan dua buah besaran fisik sulit ditemukan.

Pencocokan kurva tidak hanya bertujuan menghitung nilai fungsi, tetapi ia juga digunakan untuk mempermudah perhitungan numerik yang lain seperti menghitung nilai turunan (*derivative*) dan menghitung nilai integral ($\int$). Misalnya kita dihadapkan dengan fungsi yang bentuknya cukup rumit, seperti fungsi berikut:

$$f(x) = \frac{\ln(2x^{1/2} - 4x^2)^3}{\sqrt{1+2x^5}} \qquad \text{(P.5.1)}$$

Menghitung turunan fungsi tersebut pada nilai x tertentu, misalnya di $x = a$,

$$f\,'(a) = ?$$

merupakan pekerjaan yang cukup sulit, apalagi bila turunan yang dibutuhkan semakin tinggi ordenya. Demikian juga dengan menghitung nilai integral fungsi $f(x)$ pada selang integrasi $[a, b]$, misalnya selang $[0, 1]$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(2x^{1/2} - 4x^2)}{\sqrt{1+2x^5}}$$

merupakan pekerjaan yang tidak mudah, bahkan secara analitik pun belum tentu dapat dilakukan, karena rumus integrasi untuk fungsi semacam ini tidak tersedia. Satu pendekatan untuk melakukan dua perhitungan ini ialah dengan menyederhanakan fungsi $f(x)$ menjadi polinom $p_n(x)$ yang berderajat $\le n$,

$$f(x) \approx p_n(x)$$

yang dalam hal ini,

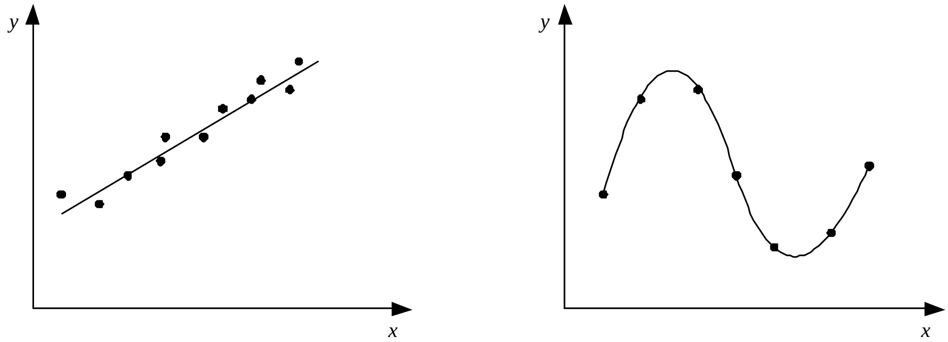
$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad \text{(P.5.2)}$$

Menghitung turunan atau mengintegralkan suku-suku polinom menjadi lebih mudah karena rumus untuk menghitung turunan atau mengintegrasikan polinom sangat sederhana, yaitu

(i) jika $f(x) = ax^n$ maka $f\,'(x) = nax^{n-1}$

(ii) $\int ax^n\,dx = \frac{a}{(n+1)} x^{n+1} + C$

Untuk membentuk polinom ini, kita mengambil beberapa titik diskrit (yang umumnya berjarak sama) dari fungsi *f*. Titik-titik tersebut secara alami direpresentasikan dalam bentuk tabel. Selanjutnya titik-titik data ini dicocokkan untuk menentukan polinom $p_n(x)$ yang menghampiri fungsi aslinya.



(a) Regresi (b) Interpolasi

Gambar 5.1 Pencocokan kurva dengan metode (a) regresi, dan (b) interpolasi

Pencocokkan kurva adalah sebuah metode yang memcocokkan titik data dengan sebuah kurva (*curve fitting*) fungsi. Pencocokan kurva dibedakan atas dua metode:

1. *Regresi.*

Data hasil pengukuran umumnya mengandung derau (*noise*) atau galat yang cukup berarti. Karena data ini tidak teliti, maka kurva yang mencocokkan titik data itu tidak perlu melalui semua titik. Tata-ancang yang dipakai adalah menentukan kurva yang mewakili kecenderungan (*trend*) titik data, yakni kurva mengikuti pola titik sebagai suatu kelompok (Gambar 5.1.a). Kurva tersebut dibuat sedemikian sehingga selisih antara titik data dengan titik hampirannya di kurva sekecil mungkin. Metode pencocokan kurva seperti ini dinamakan **regresi kuadrat terkecil** (*least square regression*). Derau pada data mungkin disebabkan oleh kesalahan mengukur, ketidaktelitian pada alat ukur, atau karena kelakuan sistem yang diukur. Contoh data yang mengandung derau adalah tabel tegangan baja di atas.

2. *Interpolasi*

Bila data diketahui mempunyai ketelitian yang sangat tinggi, maka kurva cocokannya dibuat melalui setiap titik, persis sama kalau kurva fungsi yang sebenarnya dirajah melalui tiap titik itu. Kita katakan di sini bahwa kita

menginterpolasi titik-titik data dengan sebuah fungsi (Gambar 5.1.b). Bila fungsi cocokan yang digunakan berbentuk polinom, polinom tersebut dinamakan **polinom interpolasi**. Pekerjaan menginterpolasi titik data dengan sebuah polinom disebut **interpolasi (dengan) polinom**. Contoh data yang berketelitian tinggi adalah titik-titik yang dihitung dari fungsi yang telah diketahui (seperti dari persamaan P.5.1), atau data tabel yang terdapat di dalam acuan ilmiah (seperti data percepatan gravitasi bumi sebagai fungsi jarak sebuah titik ke pusat bumi). Selain dengan polinom, interpolasi titik-titik data dapat dilakukan dengan fungsi *spline*, fungsi rasional (pecahan), atau deret *Fourier* [NAK93].

Bab ini dimulai dengan bagian pertama yaitu pencocokan kurva dengan metode interpolasi. Bagian kedua, metode regresi, akan diberikan sebagai akhir bab ini.

Interpolasi memainkan peranan yang sangat penting dalam metode numerik. Fungsi yang tampak rumit menjadi lebih sederhana bila dinyatakan dalam polinom interpolasi. Sebagian besar metode integrasi numerik, metode persamaan diferensial biasa, dan metode turunan numerik didasarkan pada polinom interpolasi. Tidak salah kalau banyak buku acuan menyatakan bahwa interpolasi merupakan pokok bahasan yang fundamental dalam metode numerik.

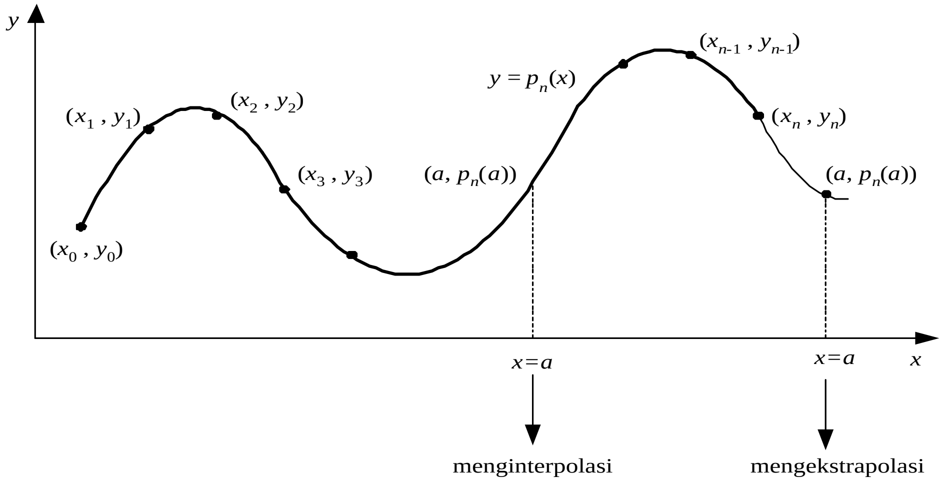
Bagian I: Interpolasi

5.1 Persoalan Interpolasi Polinom

Diberikan n+1 buah titik berbeda, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga

$$y_i = p_n(x_i) \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Nilai y_i dapat berasal dari fungsi matematika $f(x)$ (seperti ln x, sin x, fungsi Bessel, persamaan P.6.1, dan sebagainya) sedemikian sehingga $y_i = f(x_i)$, sedangkan $p_n(x)$ disebut fungsi hampiran terhadap $f(x)$. Atau, y_i berasal dari nilai empiris yang diperoleh melalui percobaan atau pengamatan.



Gambar 5.2 Interpolasi dan ekstrapolasi

Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di $x = a$, yaitu $y = p_n(a)$. Bergantung pada letaknya, nilai $x = a$ mungkin terletak di dalam rentang titik-titik data ($x_0 < a < x_n$) atau di luar rentang titik-titik data ($a < x_0$ atau $a > x_n$):

(i) jika $x_0 < a < x_n$ maka $y_k = p(x_k)$ disebut **nilai interpolasi** (*interpolated value*)
(ii) jika $x_0 < x_k$ atau $x_0 < x_n$ maka $y_k = p(x_k)$ disebut **nilai ekstrapolasi** (*extrapolated value*).

Keduanya, (i) dan (ii), ditunjukkan pada Gambar 5.2.

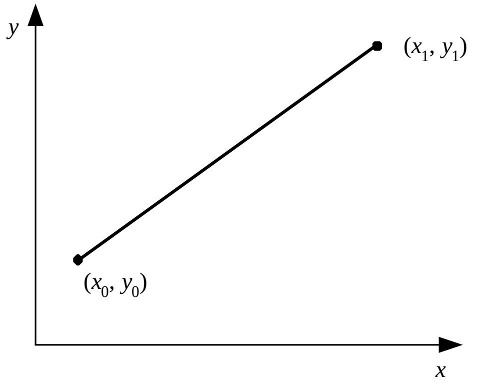
Kita dapat menginterpolasi titik data dengan polinom lanjar, polinom kuadratik, polinom kubik, atau polinom dari derajat yang lebih tinggi, bergantung pada jumlah titik data yang tersedia.

5.1.1 Interpolasi Lanjar

Interpolasi lanjar adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus. Misal diberikan dua buah titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan garis lurus yang berbentuk:

$$p_1(x) = a_0 + a_1x \qquad \text{(P.5.3)}$$

Gambar 5.3 memperlihatkan garis lurus yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0) dan (x_1, y_1).



Gambar 5.3 Interpolasi lanjar

Koefisien a_0 dan a_1 dicari dengan proses penyulihan dan eliminasi. Dengan menyulihkan (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) ke dalam persamaan (P.5.3), diperoleh dua buah persamaan lanjar:

$$y_0 = a_0 + a_1x_0$$
$$y_1 = a_0 + a_1x_1$$

Kedua persamaan ini diselesaikan dengan proses eliminasi, yang memberikan

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad \text{(P.5.4)}$$

dan

$$a_0 = \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0} \qquad \text{(P.5.5)}$$

Sulihkankan (P.5.4) dan (P.5.5) ke dalam (P.5.3) untuk mendapatkan persamaan garis lurus:

$$p_1(x) = \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0} + \frac{(y_1 - y_0)x}{(x_1 - x_0)} \qquad \text{(P.5.6)}$$

Dengan melakukan sedikit manipulasi aljabar, persamaan (P.5.6) ini dapat disusun menjadi

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \qquad \text{(P.5.7)}$$

Bukti:

$$p_1(x) = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} + \frac{(y_1 - y_0)x}{(x_1 - x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \; p_1(x) = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1 + xy_1 - xy_0}{x_1 - x_0}$$

$$\Leftrightarrow \; p_1(x) = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1 + xy_1 - xy_0 + x_0 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

$$\Leftrightarrow \; p_1(x) = \frac{(x_1 - x_0)y_0 + (y_1 - y_0)(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Leftrightarrow \; p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \qquad \blacksquare$$

Persamaan (P.5.7) adalah persamaan garis lurus yang melalui dua buah titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1). Kurva polinom $p_1(x)$ ini adalah berupa garis lurus (Gambar 5.3).

Contoh 5.1

Perkirakan jumlah penduduk Amerika Serikat pada tahun 1968 berdasarkan data tabulasi berikut [KRE88]:

Tahun	1960	1970
Jumlah penduduk (juta)	179.3	203.2

Penyelesaian:

Dengan menggunakan persamaan (P.5.7), diperoleh

$$p_1(1968) = \frac{179.3 + 203.2 - 179.3(1968 - 1960)}{1970 - 1960} = 198.4$$

Jadi, taksiran jumlah penduduk AS pada tahun 1968 adalah 198.4 juta. $\blacksquare$

Contoh 5.2

Dari data ln(9.0) = 2.1972, ln(9.5) = 2.2513, tentukan ln(9.2) dengan interpolasi lanjar [KRE88] sampai 5 angka bena. Bandingkan dengan nilai sejati ln(9.2) = 2.2192.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan persamaan (P.5.7), diperoleh

$$p_1(9.2) = \frac{2.1972 + 2.1513 - 2.1972(9.2 - 9.0)}{9.5 - 90} = 2.2192$$

Galat = 2.2192 - 2.2188 = 0.0004. Di sini interpolasi lanjar tidak cukup untuk memperoleh ketelitian sampai 5 angka bena. Ia hanya benar sampai 3 angka bena. ■

5.1.2 Interpolasi Kuadratik

Misal diberikan tiga buah titik data, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2). Polinom yang menginterpolasi ketiga buah titik itu adalah polinom kuadrat yang berbentuk:

$$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{P.5.8}$$

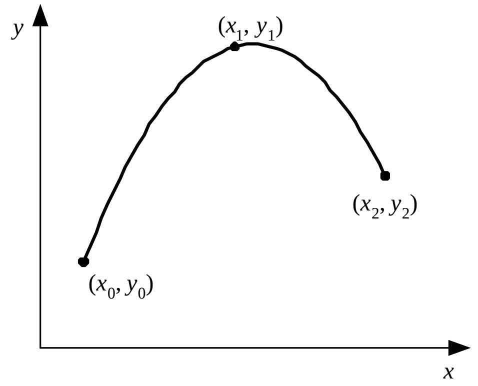
Bila digambar, kurva polinom kuadrat berbentuk parabola (Gambar 5.4).

Polinom $p_2(x)$ ditentukan dengan cara berikut:

- sulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan (P.5.8), i = 0, 1, 2. Dari sini diperoleh tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0, a_1, dan a_2:

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

- hitung a_0, a_1, a_2 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.



Gambar 5.4 Interpolasi kuadratik

Contoh 5.3

Diberikan titik ln(8.0) = 2.0794, ln(9.0) = 2.1972, dan ln(9.5) = 2.2513. Tentukan nilai ln(9.2) dengan interpolasi kuadratik.

Penyelesaian:

Sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$\begin{aligned} a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 &= 2.0794 \\ a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 &= 2.1972 \\ a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 &= 2.2513 \end{aligned}$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan a_0 = 0.6762, a_1 = 0.2266, dan a_3 = -0.0064. Polinom kuadratnya adalah

$$p_2(x) = 0.6762 + 0.2266\text{x} - 0.0064x^2$$

sehingga

$$p_2(9.2) = 2.2192$$

yang sama dengan nilai sejatinya (5 angka bena). ■

5.1.3 Interpolasi Kubik

Misal diberikan empat buah titik data, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3). Polinom yang menginterpolasi keempat buah titik itu adalah polinom kubik yang berbentuk:

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad \text{(P.5.9)}$$

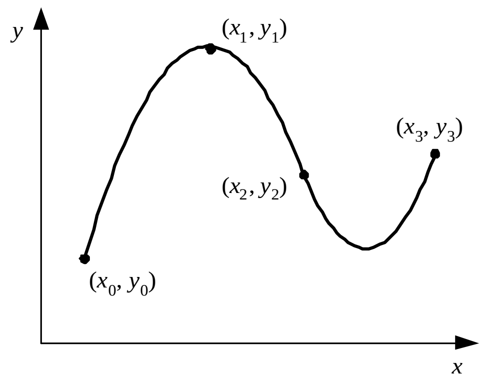
Polinom $p_3(x)$ ditentukan dengan cara berikut:

- sulihkan (x_i,y_i) ke dalam persamaan (P.5.9) , i = 0, 1, 2, 3. Dari sini diperoleh empat buah persamaan dengan empat buah parameter yang tidak diketahui, yaitu a_0 , a_1 , a_2 , dan a_3:

$$
\begin{aligned}
&a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0\\
&a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1\\
&a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2\\
&a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3
\end{aligned}
$$

- hitung a_0, a_1, a_2, dan a_3 dari sistem persamaan tersebut dengan metode eliminasi Gauss.

Bila digambar, kurva polinom kubik adalah seperti Gambar 5.5.



Gambar 5.5 Interpolasi kubik

Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx^n$$

asalkan tersedia $(n+1)$ buah titik data. Dengan menyulihkan $(x_i,\ y_i)$ ke dalam persmaan polinom di atas $y = p_n(x)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam a_0, a_1, a_2, …, a_n,

$$
\begin{aligned}
&a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^3 = y_0\\
&a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^3 = y_1\\
&a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_2^3 = y_2\\
&\ldots \qquad\qquad \ldots\\
&a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^3 = y_n
\end{aligned}
$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari.

Secara umum, penentuan polinom interpolasi dengan cara yang diuraikan di atas kurang disukai, karena sistem persamaan lanjar yang diperoleh ada kemungkinan berkondisi buruk, terutama untuk derajat polinom yang semakin tinggi.

Beberapa metode perhitungan polinom interpolasi telah ditemukan oleh oleh para numerikawan tanpa menggunakan cara pendekatan di atas. Beberapa diantaranya akan diberikan di sini, yaitu:

1. Polinom Lagrange
2. Polinom Newton
3. Polinom Newton-Gregory (kasus khusus dari polinom Newton)

Untuk sejumlah titik data yang diberikan, metode interpolasi yang berbeda-beda ini tetap menghasilkan polinom yang sama (unik), tetapi dalam bentuk yang berbeda satu sama lain, dan berbeda juga dalam jumlah komputasi yang dilibatkan. Keunikan polinom interpolasi ini akan dibuktikan setelah kita sampai pada polinom Newton.

5.2 Polinom Lagrange

Tinjau kembali polinom lanjar pada persamaan (P.5.7):

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_0)} (x - x_0)$$

Persamaan ini dapat diatur kembali sedemikian rupa sehingga menjadi

$$p_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \tag{P.5.10}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$p_1(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) \tag{P.5.11}$$

yang dalam hal ini

$$a_0 = y_0 \;, \quad L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

dan

$$a_1 = y_1 \quad , \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Persamaan (P.5.11) dinamakan **polinom Lagrange** derajat 1. Nama polinom ini diambil dari nama penemunya, yaitu Joseph Louis Lagrange yang berkebangsaan Perancis.

Bentuk umum polinom Lagrange derajat $\leq n$ untuk $(n + 1)$ titik berbeda adalah

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \ldots + a_n L_n(x) \qquad \text{(P.5.12)}$$

yang dalam hal ini

$$a_i = y_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

dan,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x)(x_i - x_i)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Mudah dibuktikan, bahwa :

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

dan polinom interpolasi $p_n(x)$ melalui setiap titik data.

Bukti:

Jika $i = j$, maka

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_i)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$= 1 \qquad \text{(karena penyebut = pembilang)}$$

Jika $i \neq j$, maka

$$L_i(x_j) \;=\; \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x_j - x_i)}{(x_i - x_j)}$$

$$= \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_j)\ldots(x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i+1})\ldots(x_j - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_j)(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$= \frac{0}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_j)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$= 0$ (karena pembilang = 0, yaitu $(x_j - x_j) = 0$)

Akibatnya,

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= L_0(x_0)\, y_0 + L_1(x_0)\, y_1 + L_2(x_0)\, y_2 + \ldots + L_n(x_0)\, y_n \\ &= 1 \,.\, y_0 + 0 \,.\, y_1 + 0 \,.\, y_2 + \ldots + 0 \,.\, y_n \\ &= y_0 \end{aligned}$$

$$p_n(x_1) = y_1$$

...

$$p_n(x_n) = y_n$$

Dengan demikian,

$$p_n(x_i) = y_i\,,\;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

atau dengan kata lain, polinom interpolasi $p_n(x)$ melalui setiap titik data. ■

Contoh 5.4

[MAT92] Hampiri fungsi $f(x) = \cos x$ dengan polinom interpolasi derajat tiga di dalam selang [0.0, 1.2]. Gunakan empat titik, $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$, dan $x_3 = 1.2$. Perkirakan nilai $p_3(0.5)$, dan bandingkan dengan nilai sejatinya.

Penyelesaian:

x_i	0.0	0.4	0.8	1.2
y_i	1.000000	0.921061	0.696707	0.362358

Polinom Lagrange derajat 3 yang menginterpolasi keempat titik di tabel adalah

$$p_3(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + a_3 L_3(x)$$

$$= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$= 1.000000 \frac{(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.0-0.4)(0.0-0.8)(0.0-1.2)} +$$

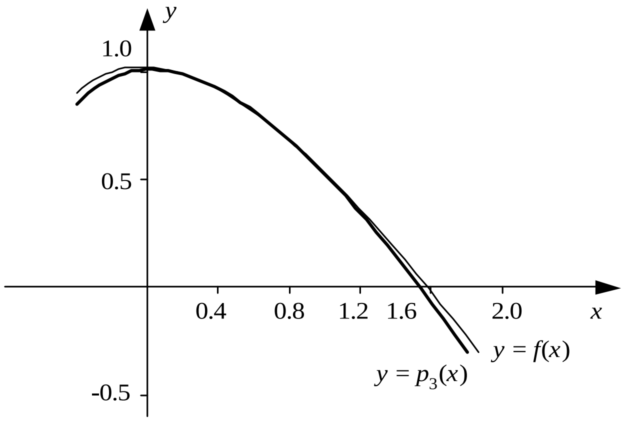
$$0.921061 \frac{(x-0.0)(x-0.8)(x-1.2)}{(0.4-0.0)(0.4-0.8)(0.4-1.2)} +$$

$$0.696707 \frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2)}{(0.8-0.0)(0.8-0.4)(0.8-1.2)} +$$

$$0.362358 \frac{(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8)}{(1.2-0.0)(1.2-0.4)(1.2-0.8)}$$

$$= \frac{-2.604167(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2) + 7.195789(x-0.0)(x-0.8)(x-1.2)}{-5.443021(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2) + 0.943640(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8)}$$

Untuk mengurangi galat akibat pembulatan, polinom $p_3(x)$ ini tidak perlu disederhanakan lebih jauh. Kurva $y = \cos(x)$ dan $y = p_3(x)$ diperlihatkan pada Gambar 5.6.



Gambar 5.6 Grafik fungsi $y = \cos(x)$ dan $y = p_3(x)$

Dengan menggunakan polinom interpolasi $p_3(x)$ itu kita dapat menaksir nilai fungsi di $x = 0.5$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
p_3(0.5) &= -2.604167(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.8)(0.5 - 1.2) \\
&\quad + 7.195789(0.5 - 0.0)(0.5 - 0.8)(0.5 - 1.2) \\
&\quad -5.443021(0.5 - 0.0)(0.5 - 0.4)(0.5 - 1.2) \\
&\quad + 0.943640(0.5 - 0.0)(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.8) \\
&= 0.877221
\end{aligned}
$$

Sebagai perbandingan, nilai sejatinya adalah

$y = \cos(0.5) = 0.877583$ ■

Catatlah bahwa polinom Lagrange tidak hanya berlaku untuk titik-titik yang berjarak sama. Kita juga dapat membentuk polinom Lagrange untuk titik-titik data yang tidak berjarak sama. Perhatikan contoh 5.5 berikut.

Contoh 5.5

Dari fungsi $y = f(x)$, diberikan tiga buah titik data dalam bentuk tabel:

x	1	4	6
y	1.5709	1.5727	1.5751

Tentukan $f(3.5)$ dengan polinom Lagrange derajat 2. Gunakan lima angka bena.

Penyelesaian:

Polinom derajat 2 $\rightarrow$ $n = 2$ (perlu tiga buah titik)

$$p_2(x) = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1 + L_2(x)\, y_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)} \quad \rightarrow L_0(3.5) = \frac{(3.5-4)(3.5-6)}{(1-4)(1-6)} = 0.083333$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)} \quad \rightarrow L_1(3.5) = \frac{(3.5-1)(3.5-6)}{(4-1)(4-6)} = 1.0417$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)} \quad \rightarrow L_2(3.5) = \frac{(3.5-1)(3.5-4)}{(6-1)(6-4)} = -0.12500$$

Jadi,

$$
\begin{aligned}
p_2(3.5) &= (0.083333)(1.5709) + (1.0417)(1.5727) + (-0.12500)(1.5751) \\
&= 1.5723
\end{aligned}
$$ ■

Polinom Lagrange mudah diprogram. Algoritmanya dituliskan pada Program 5.1 berikut ini.

Program 5.1 Polinom Lagrange

```
function Lagrange(x:real; n:integer):real;
{ Menghitung y = pn(x), dengan p(x) adalah polinom Lagrange derajat n.
  Titik-titik data telah disimpan di dalam larik x[0..n] dan y[0..n]
}
var
  i, j  : integer;
  pi, L : real;
begin
  L:=0;
  for i:=0 to n do
    begin
       pi:=1;
       for j:=0 to n do
          if i<> j then
             pi:=pi*(x - x[j])/(x[i] - x[j]);
       {endfor}
       L:=L + y[i]*pi;
    end {for};
    Lagrange:=L;
end {Lagrange};
```

5.3 Polinom Newton

Polinom Lagrange kurang disukai dalam praktek karena alasan berikut [CHA91]:

1. Jumlah komputasi yang dibutuhkan untuk satu kali interpolasi adalah besar. Interpolasi untuk nilai x yang lain memerlukan jumlah komputasi yang sama karena tidak ada bagian komputasi sebelumnya yang dapat digunakan.
2. Bila jumlah titik data meningkat atau menurun, hasil komputasi sebelumnya tidak dapat digunakan. Hal ini disebakan oleh tidak adanya hubungan antara $p_{n-1}(x)$ dan $p_n(x)$ pada polinom Lagrange.

Polinom Newton dibuat untuk mengatasi kelemahan ini. Dengan polinom Newton, polinom yang dibentuk sebelumnya dapat dipakai untuk membuat polinom derajat yang makin tinggi.

Tinjau kembali polinom lanjar pada persamaan (P.5.7):

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

Bentuk persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \tag{P.5.13}$$

yang dalam hal ini

$$a_0 = y_0 = f(x_0) \tag{P.5.14}$$

dan

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{P.5.15}$$

Persamaan (P.5.15) ini merupakan bentuk selisih-terbagi (*divided-difference*) dan dapat disingkat penulisannya menjadi

$$a_1 = f\,[x_1\,,\, x_0] \tag{P.5.16}$$

Setelah polinom lanjar, polinom kuadratik dapat dinyatakan dalam bentuk

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{P.5.17}$$

atau

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{P.5.18}$$

Persamaan (P.5.18) memperlihatkan bahwa $p_2(x)$ dapat dibentuk dari polinom sebelumnya, $p_1(x)$. Ini mengarahkan kita pada pembentukan polinom Newton untuk derajat yang lebih tinggi. Nilai a_2 dapat ditemukan dengan menyulihkan $x = x_2$ untuk memperoleh

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \tag{P.5.19}$$

Nilai a_0 dan nilai a_1 pada persamaan (P.5.14) dan (P.5.15) dimasukkan ke dalam ke dalam persamaan (P.5.19) untuk memberikan

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

Dengan melakukan utak-atik aljabar, persamaan terakhir ini lebih disukai ditulis menjadi

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \quad \text{(P.5.20)}$$

Demikianlah seterusnya, kita dapat membentuk polinom Newton secara bertahap: polinom derajat n dibentuk dari polinom derajat $(n$-1). Polinom Newton dinyatakan dalam hubungan rekursif sebagai berikut:

(i) rekurens: $p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$ (P.5.21)
(ii) basis: $p_0(x) = a_0$

Jadi, tahapan pembentukan polinom Newton adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= p_0(x) + a_1(x - x_0) \\
&= a_0 + a_1(x - x_0) \\[6pt]
p_2(x) &= p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\[6pt]
p_3(x) &= p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&\vdots \\
p_n(x) &= p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \\
&= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\
&\quad \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \qquad \text{(P.5.22)}
\end{aligned}$$

Nilai konstanta a_0, a_1, a_2, ..., a_n merupakan nilai selisih-terbagi, dengan nilai masing-masing:

$a_0 = f(x_0)$
$a_1 = f[x_1, x_0]$
$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$
$\vdots$
$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$

yang dalam hal ini,

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \tag{P.5.23}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \tag{P.5.24}$$

$$\vdots$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0} \tag{P.5.25}$$

Dengan demikian polinom Newton pada (P.5.21) dapat ditulis dalam hubungan rekursif sebagai

(i) rekurens:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})\ f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] \tag{P.5.26}$$

(ii) basis: $p_0(x) = f(x_0)$

atau dalam bentuk polinom yang lengkap sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0] \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})\ f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] \end{aligned} \tag{P.5.27}$$

Karena tetapan a_0, a_1, a_2, ..., a_n merupakan nilai selisih-terbagi, maka polinom Newton dinamakan juga **polinom interpolasi selisih-terbagi Newton**. Nilai selisih terbagi ini dapat dihitung dengan menggunakan tabel yang disebut tabel selisih-terbagi, misalnya tabel selisih-terbagi untuk empat buah titik (n = 3) berikut:

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0)]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_1]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Keterangan: ST = Selisih-Terbagi

Sekali tabel selisih-terbagi dibentuk, polinom interpolasi yang melewati sekumpulan titik (x_i, y_i) berbeda (misalnya untuk i = 0,1, 2, atau i = 1, 2, 3) dapat ditulis dengan mudah. Bila bagian tabel yang diarsir dinyatakan di dalam matriks `ST[0..n, 0..n],` maka evaluasi $p_n(x)$ untuk $x = t$ dapat dinyatakan sebagai

$$p_n(t) = ST[0,0] + ST[0,1](t - x_0) + ST[0,2](t - x_0)(t - x_1) + ... + ST[0,n](t - x_0)(t - x_1)...(t - x_{n-1})$$

Seperti halnya polinom Lagrange, polinom Newtom juga mudah diprogram. Algoritmanya dituliskan pada Program 5.3 di bawah ini.

Program 5.2 Polinom Newton

```
function Newton(x:real; n:integer):real;
{Menghitung y = p(x), dengan p(x) adalah polinom Newton derajat n.
 Titik-titik data telah disimpan di dalam larik x[0..n] dan y[0..n]
}
var
  i, k  : integer;
  ST : array[0..30, 0..30] of real;  {menyimpan tabel selisih terbagi}
  jumlah, suku: real;

begin
  for k:=0 to n do        { simpan y[k] pada kolom 0 dari matriks ST }
     ST[k,0]:=y[k];
  {end for}
  for k:=1 to n do        {buat tabel selisih terbagi}
     for i:=0 to n-k do
         ST[i,k]:=(ST[i+1,k-1] - ST[i,k-1])/(x[i+k]-x[i]);
     {end for}
  {end for}
  {hitung p(x) }
  jumlah:=ST[0,0];
  for i:=1 to n do
   begin
       suku:=ST[0,i];
       for k:=0 to i-1 do
          suku:=suku*(x-x[k])
       {end for}
       jumlah:=jumlah + suku;
   end;
  Newton:=jumlah;
end;
```

Contoh 5.6

Hitunglah $f(9.2)$ dari nilai-nilai (x, y) yang diberikan pada tabel di bawah ini dengan polinom Newton derajat 3.

Penyelesaian:

Tabel selisih-terbagi:

i	x_i	y_i	ST-1	ST-2	ST-3
0	8.0	2.079442	0.117783	-0.006433	0.000411
1	9.0	2.197225	0.108134	-0.005200	
2	9.5	2.251292	0.097735		
3	11.0	2.397895			

Contoh cara menghitung nilai selisih-terbagai pada tabel adalah:

$$f(x_2, x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2.251292 - 2.197225}{9.5 - 9.0} = 0.108134$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{0.108134 - 0.117783}{9.5 - 8.0} = -0.006433$$

dan seterusnya.

Nilai-nilai selisih-terbagi yang dibutuhkan untuk membentuk polinom Newton derajat 3 ditandai dengan arsiran.

Polinom Newton-nya (dengan x_0 = 8.0 sebagai titik data pertama) adalah:

$$f(x) \approx p_3(x) = 2.079442 + 0.117783(x - 8.0) - 0.006433(x - 8.0)(x - 9.0) + 0.000411(x - 8.0)(x - 9.0)(x - 9.5)$$

Taksiran nilai fungsi pada x = 9.2 adalah

$$f(9.2) \approx p_3(9.2) = 2.079442 + 0.141340 - 0.001544 - 0.000030 = 2.219208$$

Nilai sejati $f(9.2) = \ln(9.2)$ = 2.219203 (7 angka bena). Catatlah bahwa nilai interpolasi ln(9.2) semakin teliti dengan meningkatnya orde polinom (Contoh 5.2, Contoh 5.3, dan Contoh 5.6 ini):

$p_1(9.2) = 2.220782$,

$p_2(9.2) = 2.219238$,

$p_3(9.2) = 2.219203$ ■

Contoh 5.7

[MAT92] Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga, dan empat yang menghampiri fungsi $f(x) = \cos(x)$ di dalam selang [0.0 , 4.0] dan jarak antar titik adalah 1.0. Lalu, taksirlah nilai fungsi di x = 2.5 dengan polinom Newton derajat tiga.

Penyelesaian:

Dengan jarak antar titik 1.0, maka titik yang digunakan adalah pada x_0 = 0.0, x_1 = 1.0, x_2 = 3.0, x_3 = 4.0. Tabel selisih terbaginya adalah:

i	x_i	$f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3	ST-4
0	0.0	1.0000	-0.4597	-0.2484	0.1466	-0.0147
1	1.0	0.5403	-0.9564	0.1913	0.0880	
2	2.0	-0.4161	-0.5739	0.4551		
3	3.0	-0.9900	0.3363			
4	4.0	-0.6536	$f(x_3, x_2)$			

Contoh cara menghitung nilai selisih-terbagi pada tabel:

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0.5403 - 1.0000}{1.0 - 0.0} = -0.4597$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-0.4161 - 0.5403}{2.0 - 1.0} = -0.9564$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{-0.9564 + 0.4597}{2.0 - 0.0} = -0.2484$$

Maka, polinom Newton derajat 1, 2, dan 3 dengan $x_0 = 0.0$ sebagai titik data pertama adalah

$$\cos(x) \approx p_1(x) = 1.0000 - 0.4597(x - 0.0)$$
$$\cos(x) \approx p_2(x) = 1.0000 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0)$$
$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1.0000 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) + 0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)$$
$$\cos(x) \approx p_4(x) = 1.0000 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) + 0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0) - 0.0147(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)(x - 3.0)$$

Grafik $y = \cos(x)$ dan $y = p_1(x)$, $y = p_2(x)$, $y = p_3(x)$, diperlihatkan pada Gambar 5.7. Perhatikan bahwa $y = p_3(x)$ lebih baik dalam menghampiri fungsi $y = \cos(x)$ (kurvanya hampir tepat sama/ berimpit di dalam selang [0.0, 3.0]).

Taksiran nilai fungsi di $x = 2.5$ dengan polinom derajat tiga adalah

$$\cos(2.5) \approx p_3(2.5) = 1.0000 - 0.4597(2.5 - 0.0) - 0.2484(2.5 - 0.0)(2.5 - 1.0) + 0.1466(2.5 - 0.0)(2.5 - 1.0)(2.5 - 2.0) \approx -0.8056$$

Nilai sejati $f(2.5)$ adalah

$$f(2.5) = \cos(2.5) = -0.8011$$

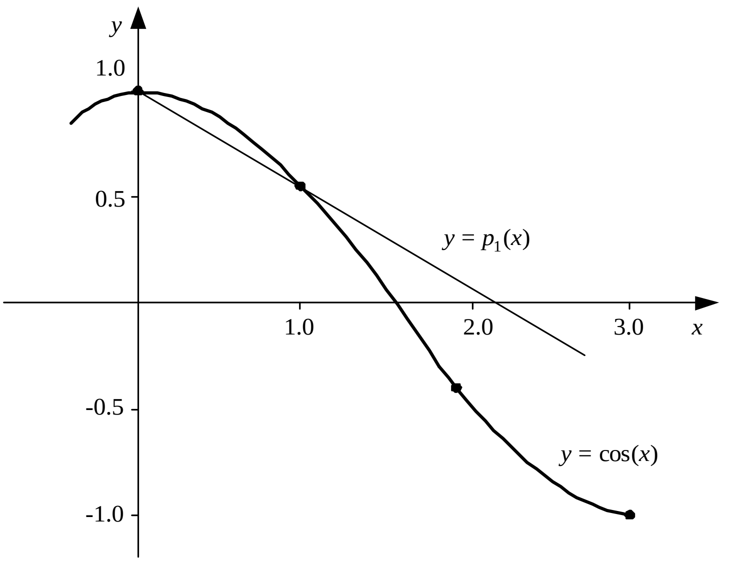
sehingga solusi hampiran mengandung galat sejati sebesar

$$e = -0.8011 - (-0.8056) = -0.0045$$

Catatan:

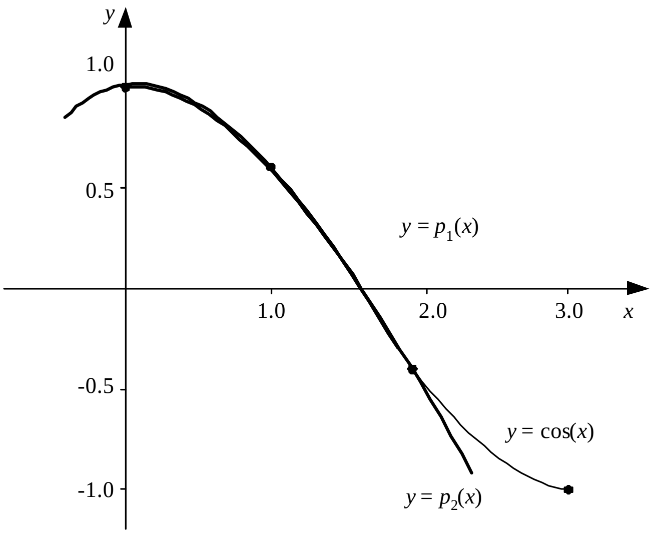
Titik $x_0 = 0$ tidak selalu harus merupakan ujung selang. Bila $p_3(x)$ didasarkan pada titik $x_0 = 1.0$, $x_1 = 2.0$, $x_3 = 3.0$, dan $x_4 = 4.0$ di dalam selang [1.0, 4.0], maka polinom Newton yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah

$$p_3(x) = 0.5403 - 0.9564\,(x - 1.0) + 0.1913\,(x - 1.0)\,(x - 2.0) + 0.0880(x - 1.0)(x - 2.0)(x - 3.0)$$ ■

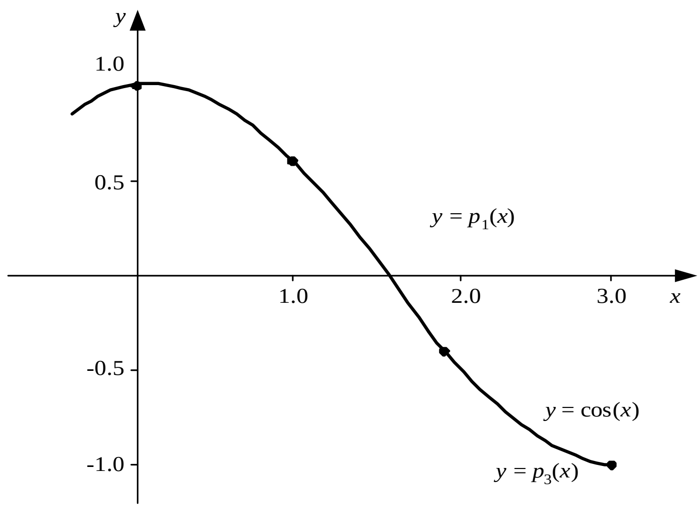


Grafik $y = \cos(x)$ dan polinom Newton derajat 1, $y = p_1(x)$, yang didasarkan pada titik $x_0 = 0.0$ dan $x_1 = 1.0$

Gambar 5.7 Polinom Newton derajat 1 yang menginterpolasi fungsi $y = \cos x$ di dalam selang [0.0, 4.0]



Grafik $y = \cos(x)$ dan polinom Newton derajat 2, $y = p_2(x)$, yang didasarkan pada titik $x_0 = 0.0$, $x_1 = 1.0$, $x_2 = 2.0$



Grafik $y = \cos(x)$ dan polinom Newton derajat 3, $y = p_3(x)$, yang didasarkan pada titik $x_0 = 0.0$, $x_1 = 1.0$, $x_2 = 2.0$, dan $x_2 = 3.0$

Gambar 5.7 (lanjutan) Polinom Newton derajat 2 dan 3 yang menginterpolasi fungsi y =cos x di dalam selang [0.0, 4.0]

Kelebihan Polinom Newton

Sekarang kita tuliskan alasan mengapa polinom Newton lebih disukai untuk diprogram, yaitu

1. Karena polinom Newton dibentuk dengan menambahkan satu suku tunggal dengan polinom derajat yang lebih rendah, maka ini memudahkan perhitungan polinom derajat yang lebih tinggi dalam program yang sama [CHA91]. Karena alasan itu, polinom Newton sering digunakan khususnya pada kasus yang derajat polinomnya tidak diketahui terlebih dahulu.
2. Penambahan suku-suku polinom secara beruntun dapat dijadikan kriteria untuk menentukan tercapainya titik berhenti, yaitu apakah penambahan suku-suku yang lebih tinggi tidak lagi secara berarti memperbaiki nilai interpolasi, atau malahan menjadi lebih buruk.
3. Tabel selisih terbagi dapat dipakai berulang-ulang untuk memperkirakan nilai fungsi pada nilai x yang berlainan.

Akan halnya polinom Lagrange, ia disukai karena ia mudah diprogram dan komputasinya tidak memerlukan penyimpanan tabel selisih. Polinom Lagrange biasanya dipakai jika derajat polinom interpolasi diketahui terlebih dahulu.

5.4 Keunikan Polinom Interpolasi

Polinom interpolasi hanya ada untuk x_i yang berbeda. Bila terdapat beberapa nilai x yang sama, kita tidak dapat membuat polinom interpolasi yang unik. Misalnya diberikan titik-titik yang ditabulasikan dalam tabel berikut

x	1	2	4	5	6	6
y	4.2	8.5	6.6	5.1	6.3	9.0

Interpolasi keenam titik tersebut dengan polinom derajat lima tidak akan menghasilkan polinom interpolasi yang unik, karena terdapat dua buah titik $x = 6$ dengan nilai y yang berbeda.

Sampai sejauh ini, kita telah membahas dua buah metode polinom interpolasi, yaitu polinom Lagrange dan polinom Newton. Apakah polinom yang dihasilkan oleh kedua metode tersebut sama? Dengan kata lain, apakah polinom interpolasi itu unik (tunggal)? Dapat kita buktikan, bahwa bila polinom interpolasi ada, maka polinom tersebut unik.

Bukti:

Misalkan $p_n(x)$ tidak unik, yang berarti ada polinom lain, misalnya $q_n(x)$, yang juga melewati titik-titik (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, yang dalam hal ini

$$p_n(x_i) = q_n(x_i) = y_i$$

Karena $p_n(x)$ dan $q_n(x)$ tidak sama, berarti ada selisih

$$R_n(x) = p_n(x) - q_n(x) \qquad \text{(P.5.28)}$$

yang dalam hal ini, $R_n(x)$ adalah polinom derajat $\le n$.
Selanjutnya,

$$R_n(x_i) = p_n(x_i) - q_n(x_i) = y_i - y_i = 0$$

Karena $R_n(x)$ adalah polinom derajat $\le n$ dan bernilai 0 untuk $(n + 1)$ buah titik, ini mengingatkan kita pada sebuah teorema di dalam kalkulus yang berbunyi:

> Polinom derajat $\le n$ yang mempunyai $(n+1)$ akar berbeda adalah polinom nol (garis $y = 0$)

Jadi, menurut teorema ini,

$$R_n(x) = 0$$

sehingga dengan demikian

$$p_n(x) - q_n(x) = 0$$

atau

$$p_n(x) = q_n(x)$$

Dengan kata lain, $p_n(x)$ unik . ■

Jadi, metode interpolasi apa pun yang kita pakai untuk menginterpolasi $(n+1)$ buah titik data yang sama, polinom interpolasinya -meskipun bentuknya berbeda-beda- bila ditulis ke dalam bentuk baku (P.5.2) adalah sama.

5.5 Galat Interpolasi Polinom

Polinom interpolasi $p_n(x)$ merupakan hampiran terhadap fungsi yang asli $f(x)$. Jadi, $p_n(x)$ tidaklah sama dengan fungsi asli $f(x)$, meskipun pada titik-titik tertentu $f(x)$ dan $p_n(x)$ bersesuaian, yaitu :

$$f(x_i) = p_n(x_i) \ , \ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Karena $f(x) \neq p_n(x)$, berarti ada selisih (galat) di antara keduanya, sebutlah $E(x)$, yaitu

$$E(x) = f(x) - p_n(x) \qquad \text{(P.5.29)}$$

Mengingat $f(x_i) = p(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, ..., n$, maka harus juga berlaku

$$E(x_i) = f(x_i) - p_n(x_i) = 0$$

yang berarti $E(x)$ mempunyai $(n+1)$ titik nol dari x_0 sampai x_n.

$E(x)$ dapat ditulis sebagai

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)\ (x - x_1) \ldots (x - x_n)\ R(x) \qquad \text{(P.5.30)}$$

atau

$$E(x) = Q_{n+1}(x)\ R(x) \qquad \text{(P.5.31)}$$

yang dalam hal ini

$$Q_{n+1}(x) = (x - x_0)\ (x - x_1) \ldots (x - x_n) \qquad \text{(P.5.32)}$$

Catatlah bahwa

$$Q_{n+1}(x_i) = 0 \text{ untuk } i = 0, 1, \ldots, n$$

$R(x)$ adalah fungsi yang mencatat nilai-nilai selain dari x_0, x_1, …,x_n. Bagaimana menentukan $R(x)$? Jawabannya di bawah ini.

Persamaan (P.5.30) dapat ditulis sebagai

$$f(x) - p_n(x) - (x - x_0)\ (x - x_1) \ldots (x - x_n)\ R(x) = 0$$

Misal didefinisikan fungsi $W(t)$ sebagai

$$W(t) = f(t) - p_n(t) - (t - x_0)\ (t - x_1) \ldots (t - x_n)\ R(x) = 0 \qquad \text{(P.5.33)}$$

Perhatikan di sini bahwa $R(x)$ tidak ditulis sebagai $R(t)$ karena kita akan mencari nilai-nilai x selain t. Persamaan $W(t) = 0$ berarti mempunyai $(n+2)$ titik nol pada $t = x_0, x_1, \ldots, x_n$ dan $t = x$. Berdasarkan teorema Rolle yang berbunyi:

> Misalkan fungsi f menerus di dalam selang $[a, b]$ dan $f'(x)$ ada untuk semua $a < x < b$. Jika $f(a) = f(b) = 0$, maka terdapat nilai c, dengan $a < c < b$, sedemikan sehingga $f'(c) = 0$.

jika W menerus dan dapat diturunkan pada selang yang berisi $(n+2)$ titik nol, maka :

$$
\begin{array}{lll}
W'(t) = 0 & \rightarrow & \text{mempunyai } (n + 1) \text{ titik nol} \\
W''(t) = 0 & \rightarrow & \text{mempunyai } n \text{ titik nol} \\
W'''(t) = 0 & \rightarrow & \text{mempunyai } (n-1) \text{ titik nol} \\
\ldots & & \\
W^{(n+1)}(t) = 0 & \rightarrow & \text{mempunyai paling sedikit 1 titik nol,}
\end{array}
$$

misal pada $t = c$

$$W^{(n+1)}(t) = 0 = \frac{d^{(n+1)}}{dt^{(n+1)}} \left[f(t) - p_n(t) - (t - x_0)(t - x_1) \ldots (t - x_n) R(x) \right]_{t = c}$$

$$= f^{(n+1)}(c) - 0 - (n + 1)!\, R(x) \qquad \text{(P.5.34)}$$

yang dalam hal ini,

$p_n(t)$ adalah polinom derajat n,

$p_n^{(n)}(t)$ adalah fungsi tetap sehingga $p_n^{(n+1)} = 0$

$Q_{n+1}(t) = (t - x_0)(t - x_1) \ldots (t - x_n) = t^{(n+1)}$ + (suku-suku polinom derajat $\leq n$)

$Q_{n+1}^{(n+1)}(t) = (n + 1)! + 0$

$R(x)$ tidak bergantung pada t, jadi ia tidak berubah selama penurunan

Dari persamaan (P.5.34), kita memperoleh

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \qquad , x_0 < c < x_n \qquad \text{(P.5.35)}$$

Perhatikanlah bahwa persamaan (P.5.35) ini mengingatkan kita pada rumus galat pemotongan pada deret Taylor (lihat Bab 2).

Selanjutnya, sulihkan (P.5.35) ke dalam (P.5.30), menghasilkan

$$E(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \qquad \text{(P.5.31)}$$

atau

$$E(x) = Q_{n+1}(x)\,\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \qquad \text{(P.5.32)}$$

dengan

$$Q_{n+1}(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_n)$$

Rumus galat ini berlaku untuk semua metode interpolasi polinom, baik polinom Lagrange, polinom Newton, atau polinom interpolasi lainnya. Misalkan kita menginterpolasi dua buah titik dengan polinom Lagrange derajat satu (polinom lanjar). Galat interpolasinya dinyatakan dalam bentuk

$$E(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2}\, f''(c)$$

Bila fungsi f diketahui, kita dapat mencari turunannya di $x = c$ untuk menghitung galat interpolasi $E(x)$. Sayangnya, kita tidak mengetahui nilai c; yang pasti nilai c terletak antara x_0 dan x_n. Jika $f^{(n+1)}$ berubah sangat lambat dalam selang $[x_0,x_n]$, atau $[x_0,x_n]$ adalah selang kecil sedemikian sehingga $f^{(n+1)}$ berubah sangat lambat, maka kita dapat menghampiri $f^{(n+1)}(c)$ dengan $f^{(n+1)}(x_t)$, yang dalam hal ini x_t adalah titik tengah x_0 dan x_n, yaitu $x_t = (x_0 + x_n)/2$. Galat interpolasi dengan menggunakan nilai x_t ini dinamakan **galat rata-rata interpolasi** E_R [NAK93]:

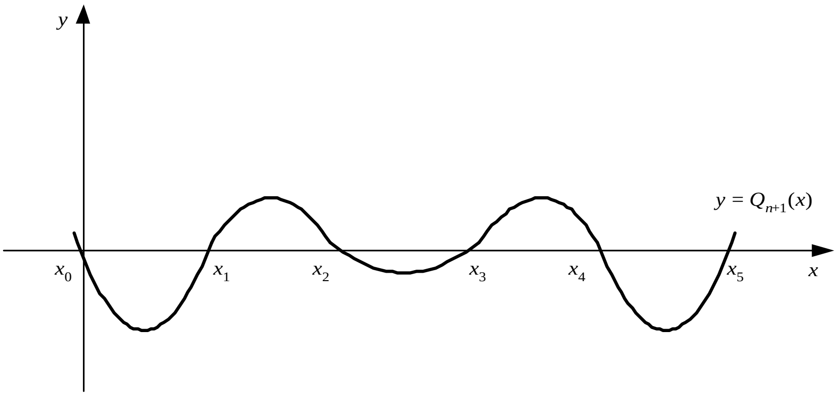
$$E_R(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\ldots(x - x_n)\,\frac{f^{(n+1)}(x_t)}{(n+1)!} \qquad \text{(P.5.33)}$$

Dari persamaan (P.5.31) terlihat bahwa galat polinom interpolasi, selain bergantung pada nilai x yang diinterpolasi, juga bergantung pada turunan fungsi semula.

Tinjau kembali Q_{n+1} pada persamaan (P.5.32):

$$Q_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_n)$$

Misalkan x_0, x_1, …, x_n berjarak sama. Grafik fungsi Q untuk enam titik yang berjarak sama ditunjukkan pada Gambar 5.8.



Gambar 5.8 Grafik fungsi $Q_6(x)$

Berdasarkan $Q_6(x)$ yang berosilasi pada Gambar 5.8 terlihat bahwa:

- di titik-titik data x_i, nilai $Q_6(x_i) = 0$, sehingga galat interpolasi $E(x_i)=0$
- di titik tengah selang, nilai $Q_6(x)$ minimum, sehingga $E(x)$ juga minimum
- di titik-titik sekitar ujung selang, $Q_6(x)$ besar, sehingga $E(x)$ juga besar
- bila ukuran selang $[x_0, x_6]$ semakin besar, amplitudo osilasi meningkat dengan cepat.

Kesimpulan:

Galat interpolasi minimum terjadi untuk nilai x di pertengahan selang. Penjelasannya adalah sebagai berikut.

Nilai-nilai x yang berjarak sama ditulis sebagai

$$x_0 , \quad x_1 = x_0 + h , \quad x_2 = x_0 + 2h , \ \ldots , \ x_n = x_0 + nh$$

atau dengan rumus umum

$$x_i = x_0 + ih \qquad , \ i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{P.5.34}$$

Titik yang diinterpolasi dinyatakan sebagai

$$x = x_0 + sh \qquad , s \in R \tag{P.5.35}$$

sehingga

$$x - x_i = (s - i)h \quad , i = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{P.5.36}$$

Galat interpolasinya adalah

$$\begin{aligned} E(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \\ &= (sh)(s - 1)h(s - 2)h \ldots (s - n)h \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \\ &= s(s - 1)(s - 2) \ldots (s - n)\, h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{P.5.37}$$

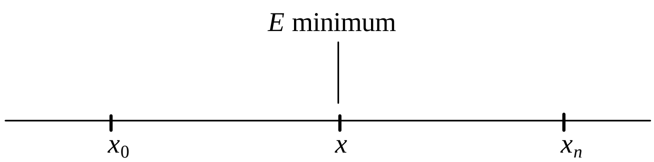
Dapat diditunjukkan bahwa

$$Q_{n+1}(s) = s(s - 1)(s - 2) \ldots (s - n)$$

bernilai minimum bila

$$Q_{n+1}'(s) = 0$$

yang dipenuhi untuk $s = n/2$ (buktikan!). Dengan kata lain, $E(x)$ bernilai minimum untuk nilai-nilai x yang terletak di (sekitar) pertengahan selang.



Ingatlah kalimat ini:

Untuk mendapatkan galat interpolasi yang minimum, pilihlah selang $[x_0, x_n]$ sedemikian sehingga x terletak di tengah selang tersebut

Misalkan kepada kita diberikan titik-titik data seperti ini:

x	$f(x)$
0.025	2.831
0.050	3.246
0.075	4.721
0.100	5.210
0.125	6.310
0.150	7.120
0.175	8.512
0.200	9.760
0.225	10.310

Bila anda diminta menghitung $f(0.160)$, maka selang yang digunakan agar galat interpolasi $f(0.160)$ kecil adalah

[0.150, 0.175] $\rightarrow$ untuk polinom derajat satu

atau

[0.125, 0.200] $\rightarrow$ untuk polinom derajat tiga

atau

[0.100, 0.225] $\rightarrow$ untuk polinom derajat lima

5.5.1 Batas Atas Galat Interpolasi Untuk Titik-Titik yang Berjarak Sama

Diberikan absis titik-titik yang berjarak sama:

$$x_i = x_0 + ih , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

dan nilai x yang akan diinterpolasikan dinyatakan sebagai

$$x = x_0 + sh , \qquad s \in \mathrm{R}$$

Untuk polinom interpolasi derajat 1, 2, dan 3 yang dibentuk dari x_i di atas dapat dibuktikan bahwa

(i) $\left|E_1(x)\right| = \left|f(x) - p_1(x)\right| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{x_0 \leq c \leq x_1} \left|f''(c)\right|$ (P.5.38)

(ii) $\left|E_2(x)\right| = \left|f(x) - p_2(x)\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 \max_{x_0 \leq c \leq x_2} \left|f'''(c)\right|$ (P.5.39)

(iii) $\left|E_3(x)\right| = \left|f(x) - p_3(x)\right| \leq \frac{1}{24} h^4 \max_{x_0 \leq c \leq x_3} \left|f^{iv}(c)\right|$ (P.5.40)

Di sini kita hanya membuktikan untuk (i) saja:

Bukti:
Misalkan $x_0 = 0$ dan $x_i = h$, persamaan galatnya adalah

$$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(c)}{2!} \quad \text{, yang dalam hal ini } x_0 < c < x_1$$

$$= \frac{x(x-h)}{2!} f''(c)$$

$$\left|E_1(x)\right| = \frac{1}{2} \left|x^2 - xh f''(c)\right|$$

$$= \frac{1}{2} \left|x^2 - xh\right| \left|f''(c)\right| \leq \frac{1}{2} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \left|x^2 - xh\right| \max_{x_0 \leq c \leq x_1} \left|f''(c)\right|$$

Misalkan

$$f(x) = x^2 - xh$$

Di dalam selang $[x_0, x_1]$, nilai maksimum lokal $f(x)$ dapat terjadi pada ujung-ujung selang ($x = 0$ atau $x = h$) atau pada titik ekstrim $f(x)$. Terlebih dahulu tentukan titik ekstrim $f(x)$ dengan cara membuat turunan pertamanya sama dengan 0:

$$f'(x) = 2x - h = 0 \rightarrow x = h/2$$

Hitung nilai maksimum lokal $f(x)$ di ujung-ujung selang dan titik ekstrim:

- di ujung selang kiri $x = 0$, $\rightarrow$ $f(0) = 0^2 - 0h = 0$
- di ujung selang kanan $x = h$ $\rightarrow$ $f(h) = h^2 - h^2 = 0$
- di titik ekstrim $x = h/2$ $\rightarrow$ $f(h/2) = (h/2)^2 - (h/2)h = {}^{-1}/_{4}\, h^2$

Jadi, ,maksimum $|f(x)| = {}^{-1}/_4\, h^2$, sehingga dengan demikian

$$|E_1(x)| = |f(x) - p_1(x)| \le \frac{1}{8}\, h^2 \max_{x_0 \le c \le x_1} |f''(c)|$$ ■

Contoh 5.8

Tinjaulah kembali tabel yang berisi pasangan titik $(x, f(x))$ yang diambil dari $f(x) = \cos(x)$.

x_i	$f(x_i)$
0.0	1.0000000
1.0	0.5403023
2.0	-0.4161468
3.0	-0.9899925
4.0	-0.6536436

(a) Hitung galat rata-rata interpolasi di titik $x = 0.5$, $x = 1.5$, dan $x = 2.5$, bila x diinterpolasi dengan polinom Newton derajat 3 berdasarkan $x_0 = 0$.

(b) Hitung batas atas galat interpolasi bila kita melakukan interpolasi titik-titik berjarak sama dalam selang [0.0 , 3.0] dengan polinom interpolasi derajat 3.

(c) Hitung batas atas dan batas bawah galat interpolasi di x = 0.5 dengan polinom Newton derajat 3

Penyelesaian:

(a) Telah diketahui dari Contoh 5.7 bahwa polinom derajat 3 yang menginterpolasi $f(+ x) = \cos(x)$ dalam selang [0.0,3.0] adalah :

$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1.0000 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2485(x - 0.0)(x - 1.0) + 0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)$$

Menghitung galat rata-rata interpolasi :

Titik tengah selang [0.0 , 3.0] adalah di $x_m = (0.0 + 3.0)/2 = 1.5$
Galat rata-rata interpolasi adalah :

$$E_3(x) = \frac{(x-0.0)(x-1.0)(x-2.0)(x-3.0)}{4!}\, f^{(4)}(x_m)$$

Hitung turunan keempat dari fungsi $f(x) = \cos(x)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x)\ ; \\ f''(x) &= -\cos(x)\ ; \\ f'''(x) &= \sin(x) \\ f^{(4)}(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

karena itu,

$$E_3(x) = \frac{(x-0.0)(x-1.0)(x-2.0)(x-3.0)}{4!}\ (\cos(1.5))$$

Untuk x = 0.5, x = 1.5, dan x = 2.5, nilai-nilai interpolasinya serta galat rata-rata interpolasinya dibandingkan dengan nilai sejati dan galat sejati diperlihatkan oleh tabel berikut :

X	$f(x)$	$p_3(x)$	$E_3(x)$	Galat sejati
0.5	0.8775826	0.8872048	0.0027632	-0.0096222
1.5	0.0707372	0.0692120	-0.0016579	0.0015252
2.5	-0.8011436	-0.8058546	0.0027632	0.0047110

Catatan:

Perhatikan bahwa karena x = 1.5 terletak di titik tengah selang, maka galat interpolasinya lebih paling kecil dibandingkan interpolasi x yang lain.

(b) Telah diketahui bahwa batas atas galat interpolasi dengan polinom derajat 3 adalah

$$E_3(x) = |f(x) - p_3(x)| \le h^4/24 \text{ Max} |f^{(4)}(c)|\ ,\ x_0 \le c \le x_3.$$

Telah diperoleh dari (a) bahwa $f^{(4)}(x) = \cos(x)$, dan dalam selang [0.0 , 3.0] nilai Max $|f^{(4)}(x)|$ terletak di x = 0.0. Jadi, $|f^{(4)}(x)| = |\cos(0.0)| = 1.000000$. Untuk $p_3(x)$ dengan jarak antar titik data adalah h = 1.0, batas atas galat interpolasinya adalah

$$E_3(x) \le (1.0)^4\ 1.000000/24 = 1/24 = 0.0416667.$$

Nilai-nilai $E_3(x)$ pada tabel di atas semuanya di bawah 0.0416667. Jadi, batas atas 0.0416667 beralasan.

(c) $$E_3(x) = \frac{(x-0.0)(x-1.0)(x-2.0)(x-3.0)}{4!}\ f^{(4)}(1.5)$$

$$E_3(0.5) = \frac{(0.5-0.0)(0.5-1.0)(0.5-2.0)(0.5-3.0)}{4!}\ (-\cos(c))\quad ,\ 0.0 \le c \le 3.0$$

Karena fungsi cosinus monoton dalam selang [0.0 , 3.0], maka nilai maksimum dan nilai minimum untuk cos (c) terletak pada ujung-ujung selang. Untuk c = 0.0 maka :

$$E_3(0.5) = \frac{(0.5-0.0)(0.5-1.0)(0.5-2.0)(0.5-3.0)}{4!}\ (\cos(0.0))$$

$= -\ 0.0390625$ *(minimum)*,

dan untuk $c = 3.0$ maka

$$E_3(0.5) = \frac{(0.5-0.0)(0.5-1.0)(0.5-2.0)(0.5-3.0)}{4!} (\cos(3.0))$$

$$= 0.0386716 \textit{ (maksimum)},$$

sehingga, batas-batas galat interpolasi di $x = 0.5$ adalah :

$$-0.0390625 \le E_3(0.5) \le 0.0386716$$ ■

5.5.2 Taksiran Galat Interpolasi Newton

Salah satu kelebihan polinom Newton dibandingkan dengan polinom Lagrange adalah kemudahan menghitung taksiran galat interpolasi meskipun fungsi asli $f(x)$ tidak diketahui, atau kalaupun ada, sukar diturunkan.

Tinjau kembali polinom Newton:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

Suku

$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

dinaikkan dari n sampai $n + 1$ menjadi

$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})(x - x_n) f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

Bentuk terakhir ini bersesuaian dengan rumus galat interpolasi

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

Ekspresi

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

dapat dihampiri nilainya dengan

$$f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

yang dalam hal ini $f(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$ adalah selisih-terbagi ke $(n + 1)$.

Jadi,

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \approx f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] \tag{P.5.41}$$

sehingga taksiran galat interpolasi Newton dapat dihitung sebagai

$$E(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_n)\,f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] \tag{P.5.42}$$

asalkan tersedia titik tambahan x_{n+1}.

Contoh 5.9

Pada Contoh 5.7, bila digunakan polinom derajat tiga untuk menaksir nilai $f(2.5)$, hitunglah taksiran galat interpolasinya.

Penyelesaian:

Bila digunakan polinom derajat tiga, maka tersedia titik sesudah x_3 =3.0, yaitu x_4 = 4.0, dan dari tabel selisih-terbagi ditemukan

$$f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] = -0.0147$$

sehingga taksiran galat dalam menginterpolasi $f(2.5)$ adalah

$$E(2.5) = (2.5 - 0.0)(2.5 - 1.0)(2.5 - 2.0)(2.5 - 3.0)\,(-0.0147) = 0.01378125 \qquad \blacksquare$$

5.5.3 Taksiran Galat Interpolasi Lagrange

Taksiran galat polinom Lagrange tidak dapat dihitung secara langsung karena tidak tersedia rumus taksiran galat seperti halnya pada interpolasi Newton. Namun, jika tabel selisih-terbagi tersedia, maka taksiran galatnya dapat dihitung dengan rumus taksiran galat polinom Newton:

$$E(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_n)\,f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

asalkan tersedia titik tambahan x_{n+1}. Meskipun demikian, tabel selisih-terbagi tidak dipakai sebagai bagian dari algoritma Lagrange, ini jarang terjadi [CHA91].

5.6 Polinom Newton-Gregory

Polinom Newton-Gregory merupakan kasus khusus dari polinom Newton untuk titik-titik yang berjarak sama. Pada kebanyakan aplikasi nilai-nilai x berjarak sama, misalnya pada tabel nilai fungsi, atau pada pengukuran yang dilakukan pada selang waktu yang teratur [KRE88].

Untuk titik-titik yang berjarak sama, rumus polinom Newton menjadi lebih sederhana. Selain itu, tabel selisih-terbaginya pun lebih mudah dibentuk. Di sini kita menamakan tabel tersebut sebagai **tabel selisih** saja, karena tidak ada proses pembagian dalam pembentukan elemen tabel.

Ada dua macam tabel selisih, yaitu tabel selisih maju (*forward difference*) dan tabel selisih mundur (*backward difference*). Karena itu, ada dua macam polinom Newton-Gregory, yaitu polinom **Newton-Gregory maju** dan polinom **Newton-Gregory mundur**.

5.6.1 Polinom Newton-Gregory Maju

Polinom Newton-Gregory maju diturunkan dari tabel selisih maju. Sebelum menurunkan rumusnya, kita bahas terlebih dahulu tabel selisih maju.

5.6.1.1 Tabel Selisih Maju

Misal diberikan lima buah titik dengan absis x yang berjarak sama. Tabel selisih maju yang dibentuk dari kelima titik tersebut adalah

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
x_3	f_3	Δf_3			
x_4	f_4				

Lambang Δ menyatakan selisih maju. Arti setiap simbol di dalam tabel adalah:

$f_0 = f(x_0) = y_0$
$f_1 = f(x_1) = y_1$
...
$f_4 = f(x_4)$
Notasi: $f_p = f(x_p)$

$\Delta f_0 \ = f_1 - f_0$
$\Delta f_1 \ = f_2 - f_1$
...
$\Delta f_3 \ = f_4 - f_3$
Notasi: $\Delta f_p \ = f_{p+1} - f_p$

$\Delta^2 f_0 \ = \Delta f_1 - \Delta f_0$
$\Delta^2 f_1 \ = \Delta f_2 - \Delta \mathrm{f}$
$\Delta^2 f_2 \ = \Delta f_3 - \Delta f_2$
Notasi: $\Delta^2 f_p \ = \Delta f_{p+1} - \Delta f_p$

$\Delta^3 f_0 \ = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$
$\Delta^3 f_1 \ = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1$
Notasi: $\Delta^3 f_p \ = \Delta^2 f_{p+1} - \Delta^2 f^{\,p}$

Bentuk umum:

$$\Delta^{n+1} f_p \quad = \Delta^n f_{p+1} - \Delta^n f_p \,, \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{P.5.43}$$

5.6.1.2 Penurunan Rumus Polinom Newton-Gregory Maju

Sekarang kita mengembangkan polinom Newton-Gregory maju yang didasarkan pada tabel selisih maju.

$$\begin{aligned} f[x_1, x_0] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{\Delta f(x_0)}{h} \\ &= \frac{\Delta f_0}{1!\,h} \end{aligned} \tag{P.5.44}$$

$$\begin{aligned} f[x_1, x_2, x_0] &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{h}}{2h}$$

$$= \frac{\Delta^2 f_0}{\Delta^2 f_0}$$

$$= \frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2} \qquad \text{(P.5.45)}$$

Bentuk umum:

$$f[x_n ,\ldots, x_1, x_0] = \frac{\Delta^n f\left(x_0\right)}{n!\,h^n} = \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n} \qquad \text{(P.5.46)}$$

Dengan demikian polinom Newton untuk data berjarak sama dapat ditulis sebagai :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)\, f(x_2, x_1, x_0) + \ldots +$$
$$(x - x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\, f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

$$= f_0 + (x - x_0)\frac{\Delta f_0}{1!\,h} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2} + \ldots +$$
$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n} \qquad \text{(P.5.47)}$$

Persamaan (P.5.47) ini dinamakan polinom Newton-Gregory maju. Persamaan (P.5.47) dapat juga ditulis sebagai relasi rekursif:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n} \qquad \text{(P.5.48)}$$

Jika titik-titik berjarak sama dinyatakan sebagai

$$x_i = x_0 + ih \qquad , i = 0,1,2,\ldots,n$$

dan nilai x yang diinterpolasikan adalah

$$x = x_0 + sh \qquad , s \in R$$

maka, persamaan (P.5.47) dapat juga ditulis dalam parameter s sebagai

$$p_n(x) = f_0 + \frac{sh}{1!\,h}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)h^2}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)h^n}{n!\,h^n}\Delta^n f_0$$

yang menghasilkan

$$p_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \qquad \text{(P.5.49)}$$

atau dalam bentuk relasi rekursif,

(i) rekurens: $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \dfrac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$

(ii) basis: $p_0(x) = f(x_0)$ (P.5.50)

Seringkali persamaan (P.5.49) dinyatakan dalam bentuk binomial:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f_0 \qquad \text{(P.5.51)}$$

yang dalam hal ini,

$$\binom{s}{0} = 1, \quad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{k!} \qquad (s > 0, \text{ bilangan bulat})$$

dan

$$k! = 1 \times 2 \times \ldots \times k$$

Tahap pembentukan polinom Newton-Gregory maju untuk titik-titik berjarak sama dapat dituliskan sebagai berikut:

$p_0(x) = f_0$

$p_1(x) = p_0(x) + \dfrac{s}{1!}\Delta f_0 = f_0 + \dfrac{s}{1!}\Delta f_0$

$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{s(s-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0$$

$$= f_0 + \frac{s}{1!}\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{s(s-1)(s-2)}{2!}\,\Delta^3 f_0$$

$$= f_0 + \frac{s}{1!}\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{2!}\,\Delta^3 f_0$$

…

$$p_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!}\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{2!}\,\Delta^3 f_0 + \ldots$$

$$\frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{n!}\,\Delta^n f_0$$

Contoh 5.10

[NOB72] Bentuklah tabel selisih untuk fungsi $f(x) = 1/(x+1)$ di dalam selang [0.000, 0.625] dan $h = 0.125$. Hitung $f(0.300)$ dengan polinom Newton-Gregory maju derajat 3.

Penyelesaian:

Tabel selisih maju:

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0.000	1.000	-0.111	0.022	-0.006
0.125	0.889	-0.089	0.016	-0.003
0.250	0.800	-0.073	0.013	-0.005
0.375	0.727	-0.060	0.008	
0.500	0.667	-0.052		
0.625	0.615			

Untuk memperkirakan $f(0.300)$ dengan polinom Newton-Gregory maju derajat tiga, dibutuhkan 4 buah titik. Ingatlah kembali bahwa galat interpolasi akan minimum jika x terletak di sekitar pertengahan selang. Karena itu, titik-titik yang diambil adalah

$$x_0 = 0.125,\ x_1 = 0.250,\ x_2 = 0.375,\ x_3 = 0.500$$

karena $x = 0.300$ terletak di sekitar pertengahan selang [0.125, 0.500].

Diketahui

$$h = 0.125$$

dan

$$x = x_0 + sh \rightarrow s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.310 - 0.125}{0.125} = 1.4$$

Nilai $f(0.300)$ dihitung dengan polinom Newton-Gregory maju derajat tiga:

$$p_3(x) \approx f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

$$\approx 0.889 + (1.4)\,(-0.089) + \frac{(1.4)(0.4)}{2}(0.016) + \frac{(1.4)(0.4)(-0.6)}{6}\,(-0.003)$$

$$\approx 0.889 - 0.1246 + 0.0045$$
$$\approx 0.769$$

Sebagai perbandingan, nilai sejati $f(0.300)$ adalah

$$f(0.300) = 1/(0.300+1) = 0.769$$ ■

Program 5.3 Polinom Newton-Gregory Maju

```
function Newton_Gregory_Maju(x:real; n:integer):real;
{  - Menghitung y = p(x), dengan p(x) adalah polinom Newton – Gregory
                    maju derajat n.
   - Titik-titik data telah disimpan di dalam larik:
            x[0..n] dan y[0..n]
}
var
  i, k   : integer;
  TS     : array[0..30, 0..30] of real;  {menyimpan tabel selisih}
  h, jumlah, suku, s: real;

    function faktorial(p:integer):integer;
    { menghitung p! }
    var
       k, fak:integer;
    begin
       fak:=1;
       for k:=2 to p do
          fak:=fak*k;
       {end for}
       faktorial:=fak;
    end; {faktorial}
```

```
begin
    for k:=0 to n do        {simpan y[k] pada kolom 0 matriks TS[k,j] }
       TS[k,0]:=y[k];
     {end for}
     for k:=1 to n do                     {bentuk tabel selisih}
        for i:=0 to (n-k) do
            TS[i,k]:=TS[i+1,k-1] - TS[i,k-1];
        {end for}
     {end for}

    {hitung p(x) }
     h:=x[1]-x[0];                            { jarak antar titik}


     s:=(x -x[0])/h;
     jumlah:=TS[0,0];
     for i:=1 to n do
      begin
         suku:=TS[0,i];
         for k:=0 to i-1 do
              suku:=suku*(s-k)
         {end for}
         suku:=suku/faktorial(i);
         jumlah:=jumlah + suku;
      end;
     Newton_Gregory_Maju:=jumlah;
end;
```

5.6.1.3 Menghitung Batas Galat Interpolasi Newton-Gregory Maju

Seperti halnya pada polinom Newton, kita dapat menghitung batas-batas galat interpolasi Newton-Gregory Maju. Perhatikan Contoh 5.11 di bawah ini.

Contoh 5.11

Misal diberikan tabel selisih yang diambil dari fungsi $f(x) = \sin(x)$ di dalam selang [0.1, 1.7] dan $h = 0.4$.

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0.1	0.09983	0.37960	-0.07570	-0.04797
0.5	0.47943	0.30390	-0.12367	-0.02846
0.9	0.78333	0.18023	-0.152134	
1.3	0.96356	0.02810		
1.7	0.99166			

Diminta menentukan $f(0.8)$ dengan polinom Newton-Gregory maju derajat dua, dan tentukan juga batas-batas galatnya.

Penyelesaian:

Polinom derajat dua $\rightarrow$ jumlah titik = 2 + 1 = 3.
Misalkan titik yang diambil adalah $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.5$, dan $x_2 = 0.9$
Titik x yang diinterpolasikan adalah $x = 0.8$

$$s = (x - x_0)/h = (0.8 - 0.1)/0.4 = 1.75$$

Jadi,

$$f(0.8) \approx p_2(x) = f_0 + \frac{s\Delta f_0}{1!} + \frac{s(s-1)\Delta^2 f_0}{2!}$$

$$= 0.09983 + \frac{(1.75)}{1} (0.37960) + \frac{(1.75)(0.75)}{2} (-0.07570)$$

$$= 0.71445$$

Batas-batas galat:

$$E(x) \approx \frac{s(s-1)(s-2)}{(n+1)!} h^3 f'''(t)$$

$$E(0.8) \approx \frac{(1.75)(0.75)(-0.25)(0.4)^3}{3!} [-\cos(t)]$$

Dalam selang [0.1, 0.9] fungsi cosinus monoton naik, sehingga nilai minimum dan nilai maksimum cosinus terletak di ujung-ujung selang.

Dengan demikian,

$$\text{galat} \leq \frac{(1.75)(0.75)(-0.25)(0.4)^3}{3!} [-\cos(0.1)] = 3.48 \times 10^{-3}$$

$$\text{galat} \geq \frac{(1.75)(0.75)(-0.25)(0.4)^3}{3!} [-\cos(0.9)] = 2.18 \times 10^{-3}$$

Jadi, batas-batas galat dalam menginterpolasi $f(0.8)$ adalah

$$2.18 \times 10^{-3} \leq \text{galat} \leq 3.48 \times 10^{-3}$$ ■

5.6.1.4 Taksiran Galat Interpolasi Newton-Gregory Maju

Seperti halnya pada polinom Newton, taksiran galat interpolasi Newton-Gregory dapat dihitung dengan menghampiri turunan fungsi ke $(n+1)$ dengan nilai pada tabel selisih.
Tinjau kembali polinom Newton-Gregory Maju:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$$

Naikkan suku

$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n}$$

dari n menjadi $n+1$:

$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\,(x - x_n) \frac{\Delta^{n+1} f_0}{(n+1)!\,h^{n+1}}$$

Bentuk terakhir ini bersesuaian dengan rumus galat interpolasi

$$E(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

sehingga, $f^{(n+1)}(t)$ dapat dihampiri dengan

$$f^{(n+1)}(t) \approx \frac{\Delta^{n+1} f_0}{h^{n+1}} \qquad \text{(P.5.52)}$$

Jadi, taksiran galat dalam menginterpolasi f(x) dengan polinom Newton-Gregory maju adalah

$$E(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_n) \frac{\Delta^{n+1} f_0}{h^{n+1}(n+1)!} \qquad \text{(P.5.53)}$$

atau dalam bentuk lain,

$$E(x) = s(s-1)(s-2)\ldots(s-n) \frac{\Delta^{n+1} f_0}{(n+1)!} \qquad \text{(P.5.54)}$$

dengan $s = (x - x_0) / h$.

Contoh 5.12

Dari Contoh 5.11, hitung taksiran galat dalam menginterpolasi $f(0.8)$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan titik tambahan $x = 1.3$, nilai $\Delta^{n+1} f_0$ dapat dihitung, yang pada tabel selisih nilainya sudah ada, yaitu

$$\Delta^{n+1} f_0 = -0.04797$$

sehingga taksiran galat dalam menginterpolasi $f(0.8)$ adalah

$$E(0.8) \approx \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0 = \frac{(1.75)(0.75)(-0.25)(-0.04797)}{3!}$$

$$= 2.62 \times 10^{-3}$$

■

Persamaan (P.5.53) atau (P.5.54) hanya digunakan bila titik x_{n+1} ada (pada Contoh 5.11, tersedia titik sesudah $x_2 = 0.9$, yaitu $x_3 = 1.3$). Bagaimana kalau titik x_{n+1} tidak ada? Untuk kasus ini kita dapat menggunakan $\Delta^{n+1} f_{-1}$ sebagai hampiran $\Delta^{n+1} f_0$ [NAK93].

5.6.1.5 Manfaat Tabel Selisih Maju

Pada contoh-contoh perhitungan yang diberikan sebelum ini, derajat polinom interpolasi ditentukan pada soal. Bila polinom interpolasi derajat n yang diinginkan, maka jumlah titik yang dibutuhkan harus $(n+1)$ buah. Sebaliknya, bila diberikan $(n+1)$ titik, maka kita dapat menginterpolasi titik-titik itu dengan polinom derajat satu (jadi hanya dua titik yang diperlukan), polinom derajat dua (tiga titik), polinom derajat tiga (empat titik) dan maksimal polinom derajat n (jadi semua titik yang dipakai). Timbul pertanyaan, dengan polinom derajat berapakah sekumpulan titik data sebaiknya diinterpolasi agar memberikan galat interpolasi yang minimum?

[NOB72] Misalkan kita membentuk tabel selisih untuk fungsi $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = x^3$ pada titik-titik x yang berjarak sama, yaitu

$$x_i = x_0 + ih\ ,\ \ i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

(i)

x	$f(x) = x$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0	h	0	0
h	h	h	0	
$2h$	$2h$	h		
$3h$	$3h$			

(ii)

x	$f(x) = x^2$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0	h^2	$2h^2$	0
h	h^2	$3h^2$	$2h^2$	0
$2h$	$4h^2$	$5h^2$	$2h^2$	
$3h$	$9h^2$	$7h^2$		
$4h$	$16h^2$			

(iii)

x	$f(x) = x^3$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0	h^3	$6h^3$	$6h^3$	0
h	h^3	$7h^3$	$12h^3$	$6h^3$	
$2h$	$8h^3$	$19h^3$	$18h^3$		
$3h$	$27h^3$	$37h^3$			
$4h$	$64h^3$				

Apa yang anda temukan dari ketiga tabel di atas? Pada ketiga tabel itu dapat disimpulkan bahwa untuk $f(x) = ax^n$, yang dalam hal ini $a = 1$ dan $n = 1, 2, 3,$ diperoleh

$$\Delta^n f(x) = a\, n!\, h^n$$

dan

$$\Delta^{n+1} f(x) = 0.$$

Apakah kesimpulan ini benar untuk $n > 3$? Misal diberikan fungsi $f(x)$ dari polinom derajat $\leq n$,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx^n$$

dan h adalah jarak antara nilai-nilai x. Selisih orde pertama adalah

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\
&= \{a_0 + a_1(x+h) + \ldots + a_n(x+h)^n\} - \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n\} \\
&= a_n[(x+h)^n - x^n] + a_{n-1}[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \text{suku-suku derajat } \leq n\text{-}2 \\
&= a_n[(x^n + nhx^{n-1} + (n-1)x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n) - x^n] + \\
&\quad\ a_{n-1}[(x^{n-1} + (n-1)hx^{n-2} + (n-2)x^{n-3}h^2 + \ldots + h^{n-1}) - x^{n-1}] + \\
&\quad\ \text{suku-suku derajat } \leq n\text{-}2 \\
&= nha_nx^{n-1} + \text{suku-suku derajat } \leq n\text{-}2
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama untuk $\Delta^2 f(x)$, $\Delta^3 f(x)$, …, kita peroleh

$$\Delta f(x) = nha_n x^{n-1}$$

$$\Delta^2 f(x) = n(n-1)\, h^2 a_n x^{n-2}$$

$$\Delta^3 f(x) = n\,(n-1)\,(n-2)\, h^3 a_n x^{n-3}$$

...

$$\Delta^n f(x) = n!\, h^n a_n x^{n-n} = n!\, h^n a_n = n(n-1)(n-2)\ldots(2)\,(1)\, h^n a_n x^{n-n}$$

$$\Delta^{n+1} \mathrm{f}(x) = 0$$

Jadi kesimpulan kita benar. Apakah kegunaan kesimpulan ini? Bila di dalam tabel selisih ditemukan Δ^k bernilai (hampir) konstan ($\neq 0$) maka polinom yang tepat menginterpolasi titik-titik itu adalah polinom berderajat k. Pada contoh tabel (iii) di atas: Δ^3 konstan, jadi titik-titiknya tepat diinterpolasi dengan polinom derajat tiga (sama dengan fungsi aslinya, $f(x) = x^3$)

Bagaimanakah jika tidak terdapat Δ yang bernilai tetap ? Misalnya diberikan tabel selisih di bawah ini:

x	$f(x) = 1/x$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0.10	10.00	-5.00	3.33	-2.49	1.98
0.20	5.00	-1.67	0.83	-0.51	0.35
0.30	3.33	-0.83	0.33	-0.16	
0.40	2.50	-0.50	0.17		
0.50	2.00	-0.33			
0.60	1.67				

Pada tabel selisih di atas, tidak ada Δ^k yang mendekati nilai tetap. Jadi $f(x) = 1/x$ tidak tepat dihampiri dengan polinom derajat 1, 2, 3, atau 4 di dalam selang [0.10, 0.60]. Tetapi jika selang datanya diperkecil dengan pengambilan h yang lebih kecil dan digunakan empat angka bena sebagai berikut:

x	$f(x) = 1/x$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0.25	4.000	-0.154	0.012	-0.003
0.26	3.846	-0.142	0.009	0.001
0.27	3.704	-0.133	0.010	-0.002
0.28	3.571	-0.123	0.008	
0.29	3.448	-0.115		
0.30	3.333			

maka dari tabel ini ditemukan Δ^2 mendekati nilai tetap yaitu sekitar 0.010. Karena itu $f(x) = 1/x$ dapat dihampiri sebanyak empat angka bena dengan polinom kuadratik di dalam selang [0.25, 0.30].

Kesimpulan:

Tabel selisih bermanfaat untuk menentukan

1. Derajat polinom interpolasi
2. Selang data
3. Ketelitian yang diinginkan.

5.6.2 Polinom Interpolasi Newton-Gregory Mundur

Polinom Newton-Gregory mundur (*Newton-Gregory backward*) dibentuk dari tabel selisih mundur. Polinom ini sering digunakan pada perhitungan nilai turunan (*derivative*) secara numerik. Titik-titik yang digunakan berjarak sama, yaitu

$$x_0, x_{-1}, x_{-2}, ..., x_{-n},$$

yang dalam hal ini,

$$x_i = x_0 + ih \qquad , i = 0, -1, -2, \ldots, -n$$

dan nilai x yang diinterpolasikan adalah

$$x = x_0 + sh \quad , s \in R$$

Sebagai contoh, tabel selisih mundur untuk 4 titik diperlihatkan oleh tabel berikut:

i	x_i	$f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
-3	x_{-3}	f_{-3}			
-2	x_{-2}	f_{-2}	∇f_{-2}		
-1	x_{-1}	f_{-1}	∇f_{-1}	$\nabla^2 f_{-1}$	
0	x_0	f_0	∇f_0	$\nabla^2 f_0$	$\nabla^3 f_0$

Keterangan:

$f_0 = f(x_0)$
$f_{-1} = f(x_{-1})$
$\nabla f_0 = f_0 - f_{-1}$
$\nabla f_{-1} = \nabla f_{-1} - \nabla f_{-2}$
$\nabla^2 f_0 = \nabla f_0 - \nabla f_{-1}$
$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$

Polinom Newton-Gregory mundur yang menginterpolasi (n+1) titik data adalah

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s+k-1}{s} \nabla^k f_0$$

$$= f_0 + \frac{s\nabla f_0}{1!} + \frac{s(s+1)\nabla^2 f_0}{2!} + \ldots + \frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1)\nabla^n f_0}{n!} \qquad \text{(P.5.55)}$$

Mengenai penurunan rumus Newton-Gregory mundur, ditinggalkan kepada anda sebagai latihan.

Contoh 5.13

Diberikan 4 buah titik data dalam tabel berikut. Hitunglah $f(1.72)$ dengan

(a) polinom Newton-Gregory maju derajat 3
(b) polinom Newton-Gregory mundur derajat 3

Misalkan jumlah angka bena yang digunakan adalah 7 digit.

Penyelesaian:

(a) Polinom Newton-Gregory maju derajat 3

i	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	1.7	0.3979849	-0.0579985	-0.0001693	0.0004093
1	1.8	0.3399864	-0.0581678	0.0002400	
2	1.9	0.2818186	-0.0579278		
3	2.0	0.2238908			

$s = (x - x_0)/h = (1.72 - 1.70)/0.1 = 0.2$

Perkiraan nilai $f(1.72)$ adalah

$$f(1.72) \approx p_3(1.72) = 0.3979849 + 0.2(-0.0579985) + \frac{0.2(-0.8)}{2}(-0.0001693) + \frac{0.2(-0.8)(-1.8)}{6}(0.0004093)$$

$$= 0.3979849 - 0.0115997 + 0.0000135 + 0.0000196$$
$$= 0.3864183$$

(nilai sejati $f(1.72) = 0.3864185$, jadi $p_3(1.72)$ tepat sampai 6 angka bena)

(b) Polinom Newton-Gregory maju derajat 3

i	x_i	$f(x_i)$	∇	∇^2	∇^3
-3	1.7	0.3979849			
-2	1.8	0.3399864	-0.0579985		
-1	1.9	0.2818186	-0.0581678	-0.0001693	
0	2.0	0.2238908	-0.0579278	0.0002400	0.0004093

Tabel di atas memperlihatkan bahwa tabel selisih mundur sama dengan tabel selisih maju, yang berbeda hanya notasi dan penempatan elemennya.

$$s = (x - x_0)/h = (1.72 - 2.0)/0.1 = -2.8$$

Perkiraan nilai $f(1.72)$ adalah

$$f(1.72) \approx p_3(1.72) = 0.2238908 - 2.8(-0.0579278) + \frac{(-2.8)(-1.8)}{2}(0.0002400)$$

$$+ \frac{(-2.8)(-1.8)(-0.8)}{6}(0.0004093)$$

$$= 0.2238908 + 0.1621978 + 0.0006048 - 0.0002750$$
$$= 0.3864183 \qquad \blacksquare$$

Contoh 5.13 memperlihatkan bahwa penyelesaian dengan Newton-Gregory maju atau mundur menghasilkan jawaban yang sama.

5.7 Ekstrapolasi

Pada awal bab sudah disinggung bahwa ekstrapolasi adalah penaksiran nilai $f(x)$ untuk x yang terletak di luar selang titik data. Dari pembahasan galat interpolasi sudah diketahui bahwa galat interpolasi semakin besar pada titik-titik yang jauh dari titik tengah selang. Dengan demikian, penaksiran nilai fungsi di luar selang menghasilkan galat ekstrapolasi yang sangat besar.

5.8 Interpolasi Dwimatra

Adakalanya kita membutuhkan perkiraan nilai fungsi dengan dua peubah. Fungsi dengan dua peubah, x dan y, secara umum dinyatakan sebagai

$$z = f(x, y)$$

Grafik fungsi z adalah berupa permukaan (*surface*) atau selimut kurva dengan alasnya adalah bidang x-y. Jadi, nilai-nilai z terletak pada permukaan tersebut.

Jika z dinterpolasi dengan polinom dua-peubah (interpolasi dwimatra atau dua-dimensi), kita harus menentukan berapa derajat dalam arah-x dan berapa derajat dalam arah-y. Misalnya z dihampiri dengan polinom dua-peubah, yang dalam hal ini derajat 2 dalam arah-x dan derajat 3 dalam arah-y:

$$z = f(x, y) \approx a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 xy^3 + a_9 y^3 + a_{10} x^2 y^2 + a_{11} x^2 y^3 \quad \text{(P.5.56)}$$

Interpolasi polinom dua-peubah dilakukan dalam dua arah: dalam arah x dan dalam arah- y. Pada setiap arah, kita harus memilih peubah yang dipegang konstan. Dalam arah-y, nilai x dipegang konstan, begitu juga dalam arah x, nilai y dipegang konstan (pemilihan arah mana yang dikerjakan terlebih dahulu memberikan jawaban yang sama). Semua metode interpolasi yang telah dibahas sebelum ini dapat digunakan untuk menginterpolasi polinom dua-peubah.

Contoh 5.14

[MAT92] Diberikan tabel $f(x,y)$ sebagai berikut:

x \ y	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.5	0.165	0.428	0.687	0.942	1.190	1.431
1.0	0.271	0.640	1.003	1.359	1.703	2.035
1.5	0.447	0.990	1524	2.045	2.549	3.031
2.0	0.738	1.568	2.384	3.177	3.943	4.672
2.5	1.216	2.520	3.800	5.044	6.241	7.379
3.0	2.005	4.090	6.136	8.122	10.030	11.841
3.5	3.306	6.679	9.986	13.196	16.277	19.198

Perkirakan nilai $f(1.6, 0.33)$ dengan polinom derajat 2 dalam arah-x dan derajat 3 dalam arah-y.

Penyelesaian:

Kita menggunakan polinom Netwon-Gregory maju untuk interpolasi dalam arah-x dan dalam arah y, karena titik-titiknya berjarak sama. Karena dalam arah-x menggunakan interpolasi derajat 2, maka kita memilih tiga buah titik di tabel yaitu pada x = 1.0, 1.5, dan 2.0 karena x = 1.6 terletak paling dekat dengan pertengahan selang [1.0, 2.0]. Dalam arah-y, kita memilih empat buah titik (interpolasi derajat 3), yaitu pada y = 0.2, 0.3, 0.4, dan 0.5 karena y = 0.33 terletak paling dekat dengan pertengahan selang [0.2, 0.5].

Dalam arah-*y* (*x* tetap):

	y	z	Δz	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$
$x = 1.0$	0.2	0.640	0.363	–0.007	–0.005
	0.3	1.003	0.356	– 0.012	
	0.4	1.359	0.344		
	0.5	1.703			
$x = 1.5$	0.2	0.990	0.534	–0.013	–0.004
	0.3	1.524	0.521	– 0.017	
	0.4	2.045	0.504		
	0.5	2.549			
$x = 2.0$	0.2	1.5680	0.816	–0.023	–0.004
	0.3	2.384	0.793	– 0.027	
	0.4	3.177	0.766		
	0.5	3.943			

Jarak antar titik dalam arah-y:

$$h = 0.1$$

dan

$$y = y_0 + sh \rightarrow s = \frac{y - y_0}{h} = \frac{0.33 - 0.2}{0.1} = 1.3$$

Polinom Newton-Gregory maju derajat tiga (dalam arah-y):

$$p_3(y) \approx f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

Untuk $x = 1.0$; $f(x, 0.33) \approx p_3(x, 0.33)$

$$p_3(\text{x}, 0.33) \approx 0.640 + \frac{1.3}{1}(0.363) + \frac{(1.3)(1.3-1)}{2}(-0.007) + \frac{(1.3)(1.3-1)(1.3-2)}{6}(-0.005)$$
$$= 1.1108$$

Untuk $x = 1.5$; $f(x, 0.33) \approx p_3(x, 0.33)$

$$p_3(x, 0.33) \approx 0.990 + \frac{1.3}{1}(0.534) + \frac{(1.3)(1.3-1)}{2}(-0.013) + \frac{(1.3)(1.3-1)(1.3-2)}{6}(-0.004)$$

$$= 1.6818$$

Untuk $x = 2.0$; $f(x, 0.33) \approx p_3(x, 0.33)$

$$p_3(x, 0.33) \approx 1.568 + \frac{1.3}{1}(0.816) + \frac{(1.3)(1.3-1)}{2}(-0.023) + \frac{(1.3)(1.3-1)(1.3-2)}{6}(-0.004)$$

$$= 2.6245$$

Dalam arah-*x* (*y* tetap):

	x	z	Δz	$\Delta^2 z$
$y = 0.33$	1.0	1.1108	0.5710	0.3717
	1.5	1.6818	0.9427	
	2.0	2.6245		

Jarak antar titik dalam arah-x:

$$h = 0.5$$

dan

$$x = x_0 + sh \rightarrow s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.6 - 1.0}{0.5} = 1.2$$

Polinom Newton-Gregory maju derajat dua (dalam arah-x):

$$p_3(x) \approx f_0 + \frac{s}{1!}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0$$

$$f(1.6, 0.33) \approx p_3(1.6, 0.33) \approx 1.1108 + \frac{1.2}{1}(0.5710) + \frac{(1.2)(1.2-1)}{2}(0.3717)$$

$$= 1.8406$$

Jadi, $f(1.6, 0.33) \approx 1.8406$ (jika dibulatkan ke dalam 4 angka bena adalah 1.841). Tabel di atas diambil dari fungsi $f(x, y) = e^x \sin y + y - 0.1$, yang mana nilai sejati $f(1.6, 0.33) = 1.8350$. Galat interpolasi adalah -0.006. Galat ini dapat dikurangi jika kita melakukan interpolasi derajat 2 dalam arah-y karena $\Delta^2 y$ kecil dan interpolasi derajat 3 dalam arah-x. ■

5.9 Contoh Soal Terapan Interpolasi

Konsentrasi larutan oksigen jenuh dalam air sebagai fungsi suhu dan konsentrasi klorida diberikan dalam bentuk tabel berikut [CHA91]:

Suhu, ^{0} C	Konsentrasi larutan Oksigen (mg/L) untuk berbagai konsentrasi klorida	
	Klorida = 10 mg/L	Klorida = 20 mg /L
5	11.6	10.5
10	10.3	9.2
15	9.1	8.2
20	8.2	7.4
25	7.4	6.7
30	6.8	6.1

Dengan mengandaikan bahwa data pada tabel berketelitian cukup tinggi, pakailah metode interpolasi untuk menaksir konsentrasi oksigen yang larut untuk T = 22.4 ^{o}C pada konsentrasi klorida 10 mg/L dan 20mg/L. Gunakan metode interpolasi Lagrange.

Penyelesaian:

<u>Konsentrasi Klorida = 10 mg/L</u>

T	$C(T)$
5	11.6
10	10.3
15	9.1
20	8.2
25	7.4
30	6.8

Bila digunakan keenam titik data itu, maka polinom interpolasinya adalah polinom Lagrange derajat lima.

$$\begin{aligned} p_5(22.4) &= (11.6)L_0(22.4) + (10.3)L_1(22.4) + (9.1)L_2(22.4) + \\ &\quad (8.2)L_3(22.4) + 7.4)L_4(22.4) + (6.8)L_5(22.4) \\ &= 7.8125049876 \text{ mg/L} \end{aligned}$$

Konsentrasi Klorida = 20 mg/L

T	$C(T)$
5	10.5
10	9.2
15	8.2
20	7.4
25	6.7
30	6.1

Polinom interpolasi Lagrange:

$$
\begin{aligned}
p_5(22.4) &= (10.5)L_0(22.4) + (9.2)L_1(22.4) + (8.2)L_2(22.4) + \\
&\quad (7.4)L_3(22.4) + (6.7)L_4(22.4) + (6.1)L_5(22.4) \\
&= 7.0550200177 \text{ mg/L}
\end{aligned}
$$

Bagian II: Regresi

5.10 Regresi

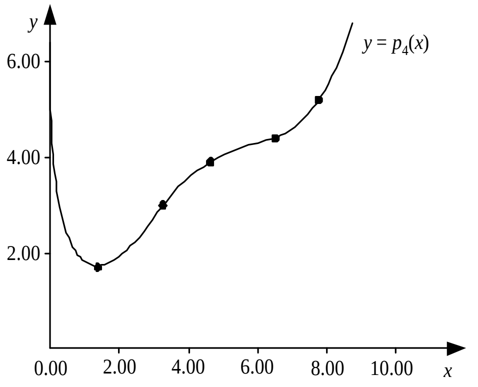
Pada bagian awal bab ini sudah dijelaskan bahwa regresi adalah teknik pencocokan kurva untuk data yang berketelitian rendah. Contoh data yang berketelitian rendah data hasil pengamatan, percobaan di laboratorium, atau data statistik. Data seperti itu kita sebut **data hasil pengukuran**. Galat yang dikandung data berasal dari ketidaktelitian alat ukur yang dipakai, kesalahan membaca alat ukur (paralaks), atau karena kelakuan sistem yang diukur.

Untuk data hasil pengukuran, pencocokan kurva berarti membuat fungsi mengampiri (*approximate*) titik-titik data. Kurva fungsi hampiran tidak perlu melalui semua titik data tetapi dekat dengannya tanpa perlu menggunakan polinom berderajat tinggi.

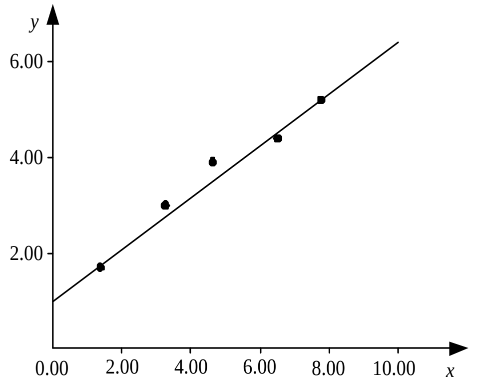
Sebagai contoh ilustrasi, diberikan data jarak tempuh (y) sebuah kendaraaan -dalam mil- setelah x bulan seperti pada tabel di bawah ini.

x	1.38	3.39	4.75	6.56	7.76
y	1.83	2.51	3.65	4.10	5.01

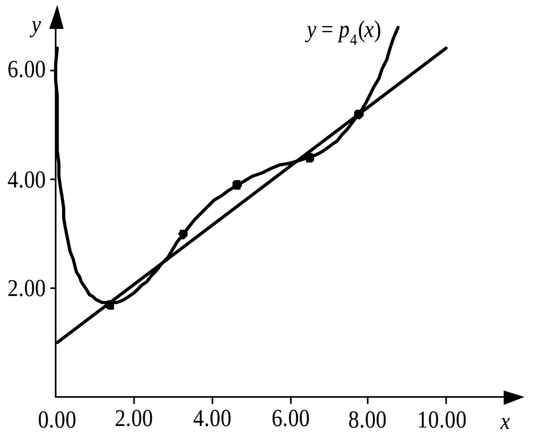
Data di dalam tabel dicocokkan dengan polinom Lagrange (Gambar 5.9(a)), dan dengan fungsi hampiran lanjar (Gambar 5.9(b)). Perbandingan keduanya diperlihatkan pada Gambar 5.9(c).



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Gambar 5.9 (a) Data dicocokan dengan polinom Lagrange derajat 4
(b) Data dicocokkan dengan garis lurus
(c) Perbandingan kedua kurva

Dari kedua pencocokan tersebut, terlihat bahwa garis lurus memberikan hampiran yang *bagus*, tetapi belum tentu yang *terbaik*. Pengertian terbaik di sini bergantung pada cara kita mengukur galat hampiran.

Prinsip penting yang harus diketahui dalam mencocokkan kurva untuk data hasil pengukuran adalah:

1. Fungsi mengandung sesedikit mungkin parameter bebas
2. Deviasi fungsi dengan titik data dibuat minimum.

Kedua prinsip di atas mendasari metode **regresi kuadrat terkecil**. Perbedaan antara metode regresi kuadrat terkecil dengan metode interpolasi polinom adalah:

Regresi kuadrat terkecil	Interpolasi polinom
1. Data berasal dari hasil pengukuran	1. Data berasal dari fungsi yang ingin disederhanakan dengan polinom, dari tabel di literatur, atau dari hasil pengukuran.
2. Data berketelitian rendah (mengandung galat)	2. Data berketelitian tinggi
3. Fungsi kuadrat terkecil tidak perlu melalui setiap titik data. Kurva fungsinya dirancang mengikuti pola titik-titik sebagai suatu kelompok.	3. Fungsi polinom interpolasi harus melalui semua titik data. Semakin banyak datanya, semakin tinggi derajat polinom, dan semakin besar galat pembulatannya
4. Data tidak harus terurut	4. Data harus terurut

Manfaat pencocokan kurva untuk data hasil pengukuran:

1. Bagi ahli sains/rekayasa: mengembangkan formula empirik untuk sistem yang diteliti.
2. Bagi ahli ekonomi: menentukan kurva kecenderungan ekonomi untuk "meramalkan" kecenderungan masa depan.

Teknik regresi yang dibahas di sini hanya regresi lanjar, yaitu pencocokan kurva untuk data yang memiliki hubungan lanjar antara peubah bebas dan peubah terikatnya. Selain regresi lanjar, ada teknik regresi lain, yaitu regresi polinom, regresi ganda, dan regresi nirlanjar. Mahasiswa dapat mempelajari ketiga teknik regresi yang disebutkan terakhir ini pada buku [CHA91].

5.10.1 Regresi Lanjar

Misalkan (x_i, y_i) adalah data hasil pengukuran. Kita akan menghampiri titik-titik tersebut dengan sebuah garis lurus (Gambar 5.10). Garis lurus tersebut dibuat sedemikian sehingga galatnya sekecil mungkin dengan titik-titik data.

Karena data mengandung galat, maka nilai data sebenarnya, $g(x_i)$, dapat ditulis sebagai

$$g(x_i) = y_i + e_i \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{P.5.57}$$

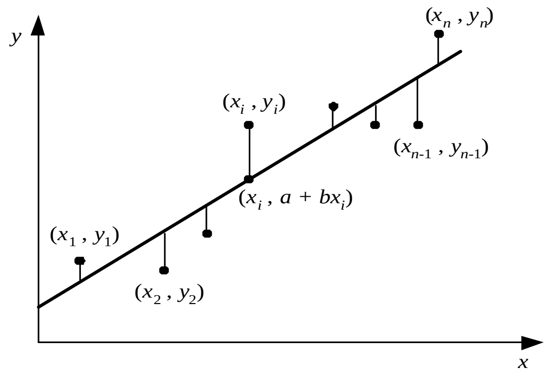
yang dalam hal ini, e_i adalah galat setiap data. Diinginkan fungsi lanjar

$$f(x) = a + bx \tag{P.5.58}$$

yang mencocokkan data sedemikian sehingga deviasinya,

$$r_i = y_i - f(x_i) = y_i - (a + bx_i) \tag{P.5.59}$$

minimum.



Gambar 5.10 Regresi lanjar

Total kuadrat deviasi persamaan (P.5.59) adalah

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \tag{P.5.60}$$

Agar R minimum, maka haruslah[2]

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -2\sum(y_i - a - bx_i) = 0 \qquad \text{(P.5.61)}$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -2\sum x_i(y_i - a - bx_i) = 0 \qquad \text{(P.5.62)}$$

Penyelesaian:

Masing-masing ruas kedua persamaaan dibagi dengan -2:

$$\begin{aligned} &\sum(y_i - a - bx_i) = 0 && \Rightarrow \sum y_i - \sum a - \sum bx_i = 0 \\ &\sum x_i(y_i - a - bx_i) = 0 && \Rightarrow \sum x_i y_i - \sum ax_i - \sum bx_i^2 = 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \sum a + \sum bx_i &= \sum y_i \\ \sum ax_i + \sum bx_i^2 &= \sum x_i y_i \end{aligned}$$

atau

$$na + b\sum x_i = \sum y_i \qquad \text{(P.5.63)}$$

$$a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i \qquad \text{(P.5.64)}$$

Kedua persamaan terakhir ini dinamakan **persamaan normal**, dan dapat dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Solusinya, a dan b, dapat diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss atau aturan Cramer. Karena data mengandung galat, maka persamaan normal sering berkondisi buruk (*ill-conditioning*). Nilai a dan b juga dapat dicari dengan mengutakatik kedua buah persamaan normal menjadi:

[2] Untuk selanjutnya, notasi $\sum_{i=1}^{n}$ ditulis "$\sum$" saja.

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad \text{(P.5.65)}$$

$$a = y - bx \qquad \text{(P.5.66)}$$

yang dalam hal ini, y dan x masing-masing adalah nilai rata-rata x dan y.

Untuk menentukan seberapa bagus fungsi hampiran mencocokkan data, kita dapat mengukurnya dengan **galat RMS** (*Root-mean-square error*):

$$E_{RMS} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - y_i \right|^2 \right)^2 \qquad \text{(P.5.67)}$$

Semakin kecil nilai E_{RMS} semakin bagus fungsi hampiran mencocokkan titik-titik data.

Contoh 5.15

[NAK93] Tentukan persamaan garis lurus yang mencocokkan data pada tabel di bawah ini. Kemudian, perkirakan nilai y untuk x = 1.0.

Penyelesaian:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0.1	0.61	0.01	0.061
2	0.4	0.92	0.16	0.368
3	0.5	0.99	0.25	0.495
4	0.7	1.52	0.49	1.064
5	0.7	1.47	0.49	1.029
6	0.9	2.03	0.81	1.827
	$\sum x_i = 3.3$	$\sum y_i = 7.54$	$\sum x_i^2 = 2.21$	$\sum x_i y_i = 4.844$

Diperoleh sistem persamaan lanjar:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 \\ 3.3 & 2.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL di atas adalah: a = 0.2862
b = 1.7645

Persamaan garis regresinya adalah: $f(x) = 0.2862 + 1.7645x$.

Perbandingan antara nilai y_i dan $f(x_i)$:

i	x_i	y_i	$f(x_i) = a + bx_i$	deviasi	(deviasi)^2
1	0.1	0.61	0.46261	0.147389	0.02172
2	0.4	0.92	0.99198	-0.07198	0.00518
3	0.5	0.99	1.16843	-0.17844	0.03184
4	0.7	1.52	1.52135	-0.00135	0.00000
5	0.7	1.47	1.52135	-0.05135	0.00264
6	0.9	2.03	1.87426	0.15574	0.02425
					$\sum = 0.08563$

Taksiran nilai y untuk $x = 1.0$ adalah

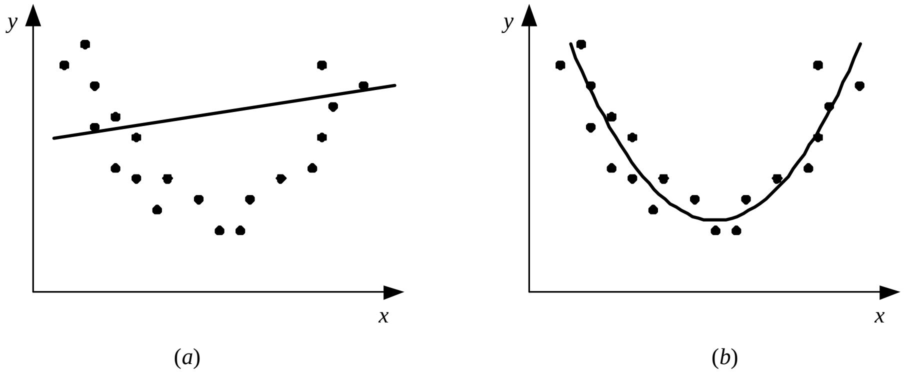
$$y = f(1.0) = 0.2862 + 1.7645(1.0) = 2.0507$$

Galat RMS adalah $E_{RMS} = \left(\frac{0.08563}{6}\right)^{1/2} = 0.119464$ ■

5.10.2 Pelanjaran

Regresi lanjar hanya tepat bila data memiliki hubungan lanjar antara peubah bebas dan peubah terikatnya. Gambar 5.11 memperlihatkan bahwa garis lurus tidak tepat mewakili kecenderungan titi-titik data, dengan kata lain pada kasus ini hubungan x dengan y tidak lanjar. Sebaliknya, fungsi kuadratik lebih tepat menghampiri titik-titik tersebut.

Langkah pertama dalam analisis regresi seharusnya berupa penggambaran titik-titik data pada diagram kartesian dan secara visual memeriksa data untuk memastikan apakah berlaku suatu model lanjar atau model nirlanjar. Penggambaran titik-titik ini sekaligus juga sangat membantu dalam mengetahui fungsi yang tepat untuk mencocokkan data.



Gambar 5.11 (a) Data yang tidak cocok untuk regresi lanjar;
(b) Petunjuk bahwa parabola lebih disenangi [CHA91]

Meskipun fungsi hampiran berbentuk nirlanjar, namun pencocokan kurva dengan fungsi nirlanjar tersebut dapat juga diselesaikan dengan cara regresi lanjar. Misalnya tiga macam fungsi nirlanjar di bawah ini:

1. Persamaan pangkat sederhana

   $y = Cx^b$, C dan b konstanta.

2. Model eksponensial

   $y = Ce^{bx}$, C dan b konstanta.

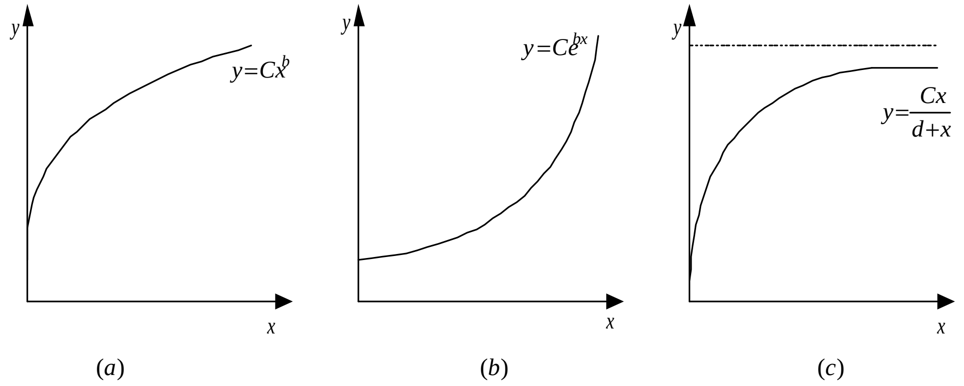
   Contoh: - model pertumbuhan populasi
   - model peluruhan zat radioaktif

3. Persamaan laju pertumbuhan jenuh (*saturation growth-rate*)

   $y = \dfrac{Cx}{d + x}$, C dan d konstanta.

   Contoh: model pertumbuhan bakteri kondisi pembatas
   (misalnya dibatasi oleh jumlah makanan)

Sketsa kurva untuk ketiga macam fungsi nirlanjar di atas diperlihatkan pada Gambar 5.12 berikut ini.



Gambar 5.12 Sketsa kurva (a) $y = Cx^b$ ($C > 0$, $b > 0$), (b) $y = Ce^{bx}$ ($C > 0$, $b > 0$), dan (c) $y = Cx/(d + x)$ ($C > 0$, $d > 0$)

Pelanjaran Persamaan Pangkat Sederhana

Misalkan kita akan mencocokkan data dengan fungsi

$$y = Cx^b \qquad \text{(P.5.68)}$$

Lakukan pelanjaran sebagai berikut:

$$y = Cx^b \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y) = \ln(C) + b \ln(x)$$

Definisikan

$$Y = \ln(y)$$
$$a = \ln(C)$$
$$X = \ln(x)$$

Persamaan regresi lanjarnya adalah:

$$Y = a + bX$$

Lakukan pengubahan dari (x_i, y_i) menjadi $(\ln(x_i), \ln(y_i))$, lalu hitung a dan b dengan cara regresi lanjar. Dari persamaan $a = \ln(C)$, kita dapat menghitung nilai

$$C = e^a$$

Sulihkan nilai b dan C ke dalam persamaan pangkat $y = Cx^b$.

Contoh 5.16

Cocokkan data berikut dengan fungsi $y = Cx^b$.

Penyelesaian:

i	x_i	y_i	$X_i = ln(x_i)$	$Y_i = ln(y_i)$	X_i^2	$X_i Y_i$
1	0.1500	4.4964	-1.8971	1.5033	3.5990	-2.8519
2	0.4000	5.1284	-0.9163	1.6348	0.8396	-1.4980
3	0.6000	5.6931	-0.5108	1.7393	0.2609	-0.8884
4	1.0100	6.2884	0.0100	1.8387	0.0001	0.0184
5	1.5000	7.0989	0.4055	1.9599	0.1644	0.7947
6	2.2000	7.5507	0..7885	2.0216	0.6217	1.5940
7	2.4000	7.5106	0.8755	2.0163	0.7665	1.7653
			$\sum X_i$ = -1.2447	$\sum Y_i$ = 12.7139	$\sum X_i^2$ = 6.2522	$\sum X_i Y_i$ = -1.0659

Diperoleh sistem persamaan lanjar

$$\begin{bmatrix} 7 & -1.2447 \\ -1.2447 & 6.2522 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.7139 \\ -1.0659 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL di atas: a = 1.8515 dan b = 0.1981.

Hitung $C = e^a = e^{1.8515} = 6.369366$

Jadi,titik-titik (x, y) pada tabel di atas dihampiri dengan fungsi pangkat sederhana:

$$y = 6.369366 x^{0.1981}$$ ■

Pelanjaran Model Eksponensial $y = Ce^{bx}$

Misalkan kita akan mencocokkan data dengan fungsi

$$y = Ce^{bx} \qquad \text{(P.5.69)}$$

Lakukan pelanjaran sebagai berikut:

$$y = Ce^{bx}$$

$$\Leftrightarrow \; ln(y) = ln(C) + bx\, ln(e)$$

$$\Leftrightarrow \; ln(y) = ln(C) + bx \qquad (ln(e) = 1)$$

Definisikan

$$Y = ln(y)$$
$$a = ln(C)$$
$$X = x$$

Persamaan regresi lanjarnya:

$$Y = a + bX$$

Lakukan pengubahan dari (x_i, y_i) menjadi $(x_i, ln(y_i))$, lalu hitung a dan b dengan cara regresi lanjar.

Dari persamaan $a = ln(C)$, kita dapat menghitung nilai $C = e^a$. Sulihkan nilai b dan C ke dalam persamaan eksponensial $y = Ce^{bx}$.

Pelanjaran Model Laju Pertumbuhan Jenuh $y = \frac{Cx}{d + x}$

Misalkan kita akan mencocokkan data dengan fungsi

$$y = \frac{Cx}{d + x} \tag{P.5.70}$$

Lakukan pelanjaran sebagai berikut:

$$y = \frac{Cx}{d + x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{d}{C}\frac{1}{x} + \frac{1}{C}$$

Definisikan

$$Y = 1/y$$
$$a = 1/C$$
$$b = d/C$$
$$X = 1/x$$

Persamaan regresi lanjarnya:

$$Y = a + bX$$

Lakukan pengubahan dari (x_i,y_i) menjadi $(1/x_i, 1/y_i)$, lalu hitung a dan b dengan cara regresi lanjar.

Dari persamaan $a = 1/C$, kita dapat menghitung nilai $C = 1/a$.
Dari persamaan $b = d/C$, kita dapat menghitung $d = bC$.
Sulihkan d dan C ke dalam persamaan laju pertumbuhan jenuh $y = Cx/(d+x)$.

Tabel berikut merangkum beberapa fungsi dan pelanjarannya [MAT92]:

Fungsi $y = f(x)$	Bentuk lanjar $y = a + bX$	Perubahan peubah dan kontanta
$y = Cx^b$	$ln(y) = ln(C) + b\, ln(x)$	$Y = ln(y)$, $X = ln(x)$, $C = e^a$
$y = Ce^{bx}$	$ln(y) = ln(C) + bx$	$Y = ln(y)$, $X = x$, $C = e^a$
$y = \dfrac{Cx}{d+x}$	$\dfrac{1}{y} = \dfrac{d}{C}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{C}$	$Y = 1/y$, $X = 1/x$ $C = 1/a$, $d = bC$
$y = a + \dfrac{b}{x}$	$y = a + b\dfrac{1}{x}$	$Y = y$, $X = 1/x$
$y = \dfrac{D}{x+C}$	$y = \dfrac{D}{C} + \dfrac{-1}{C}(xy)$	$Y = y$, $X = xy$, $C = \dfrac{-1}{b}$, $D = \dfrac{-a}{b}$
$y = \dfrac{1}{a+bx}$	$\dfrac{1}{y} = a + bX$	$Y = \dfrac{1}{y}$, $X = x$
$y = (a+bx)^{-2}$	$y^{-1/2} = a + bX$	$Y = y^{-1/2}$, $X = x$
$y = Cxe^{-Dx}$	$\ln(\dfrac{y}{x}) = \ln(C) + (-Dx)$	$Y = \ln(\dfrac{y}{x})$, $X = x$ $C = e^a$, $D = -b$

5.11 Contoh Penerapan Regresi dalam Bidang Rekayasa

Di bawah ini disajikan contoh penerapan regresi dalam bidang teknik kimia. Contoh ini dikutip dari buku [CHA91] dengan beberapa perubahan.

Model Populasi

Model pertumbuhan populasi, misalnya populasi bakteri, adalah penting dalam bidang rekayasa. Yang merupakan dasar terhadap banyak model tersebut adalah andaian bahwa laju perubahan populasi (*dp*/*dt*) adalah sebanding dengan populasi sebenarnya (*p*) pada sembarang waktu (*t*), atau dalam bentuk persamaan

$$\frac{dp}{dt} = kp \qquad \text{(P.5.71)}$$

yang dalam hal ini, *k* adalah kesebandingan yang disebut laju pertumbuhan yang spesifik dan mempunyai satuan waktu^{-1}. Jika *k* adalah tetapan, maka penyelesaian persamaan (P.5.71) adalah

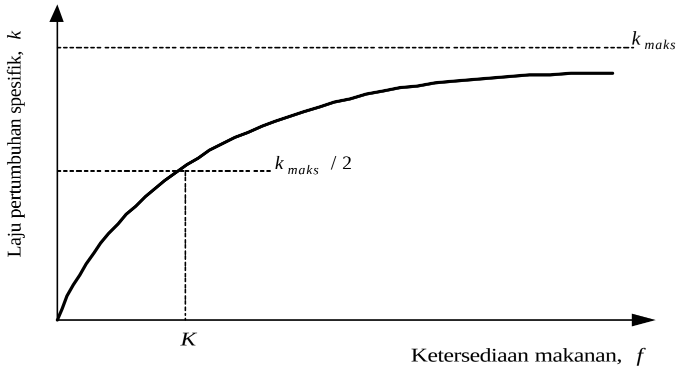
$$p(t) = p_0\, e^{kt} \qquad \text{(P.5.72)}$$

yang dalam hal ini, p_0 adalah populasi pada saat $t = 0$. Terlihat bahwa $p(t)$ dalam persamaan (P.5.72) mendekati tak hingga begitu *t* menjadi besar. Perilaku ini jelas tidak mungkin untuk sistem yang nyata. Karena itu modelnya harus diubah untuk membuatnya lebih nyata.

Pertama, harus diketahui bahwa laju pertumbuhan yang khusus *k* tidak dapat berupa tetapan begitu populasi menjadi besar. Ini adalah kasusnya, karena begitu *p* mendekati tak hingga, organisme yang sedang dimodelkan akan menjadi dibatasi oleh faktor-faktor kekurangan makanan dan produksi sampah beracun. Satu cara untuk mengungkapkan ini secara matematis adalah memakai model laju pertumbuhan jenuh sedemikian sehingga

$$k = \frac{k_{maks}\, f}{K + f} \qquad \text{(P.5.73)}$$

dalam hal ini, k_{maks} adalah laju pertumbuhan yang dapat tercapai untuk nilai makanan besar (*f*) dan *K* adalah konstanta setengah jenuh. Gambar 5.12 memperlihatkan bahwa pada saat $f = K$, maka $k = k_{maks}/2$. Oleh karena itu, *K* adalah banyaknya makanan yang menunjang laju pertumbuhan populasi yang sama dengan setengah laju maksimum.



Gambar 5.12 Laju pertumbuhan populasi terhadap ketersediaan makanan

Konstanta K dan k_{maks} adalah nilai-nilai empiris yang didasarkan pada pengukuran k secara eksponensial untuk beragam nilai f. Sebagai contoh, andaikan populasi p menyatakan ragi yang digunakan dalam proses fermentasi alkohol dan f adalah konsentrasi sumber karbon yang harus difermentasikan. Pengukuran k terhadap f untuk ragi diperlihatkan pada tabel berikut:

f, mg/Liter	k, hari^{-1}
7	0.29
9	0.37
15	0.48
25	0.65
40	0.80
75	0.97
100	0.99
150	1.07
160	1.18
190	1.36
200	1.82

Tabel Pengukuran k terhadap jumlah ketersediaan makakan

Anda diminta menghitung k_{maks} dan K untuk data empirik ini. Mula-mula lakukan pelanjaran terhadap persamaan (P.5.73) menjadi

$$Y = a + bX \tag{P.5.74}$$

Transformasikan data dalam bentuk lanjar yang ekivalen itu, lalu hitung A dan B menggunakan metode regresi lanjar. Selanjutnya anda dapat menghitung nilai k_{maks} dan K.

Dengan menyulihkan persamaan (P.5.73) kedalam persamaan (P.5.71) diperoleh

$$\frac{dp}{dt} = \frac{k_{maks} fp}{K + f} \tag{P.5.75}$$

yang dalam hal ini, k_{maks} dan K adalah besaran yang telah ditemukan. Persamaan (P.5.75) ini selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan teori diferensial atau menggunakan metode numerik untuk persamaan diferensial biasa (PDB) bila f pada saat t diketahui Dari persamaan (P.5.75) terlihat bahwa jika f mendekati nol karena p sangat besar, dp/dt mendekati nol dan populasi dikatakan stabil.

Penyelesaian:

Tinjau pencocokan kurva untuk fungsi laju pertumbuhan jenuh saja:

$$k = \frac{k_{maks} f}{(K + f)}$$

Lakukan pelanjaran:

$$\frac{1}{k} = \frac{K + f}{k_{maks} f} = \frac{1}{k_{maks}} + \frac{K}{k_{maks}} \frac{1}{f}$$

Persamaan regresi lanjarnya adalah

$$Y = a + bX$$

dengan

$Y = 1/k$
$a = 1/k_{maks}$
$b = K/k_{maks}$
$X = 1/f$

Lakukan transformasi dari (f_i, k_i) menjadi ($1/f_i$, $1/k_i$):

$X_i = 1/f_i$	X_i^2	$Y_i = 1/k_i$	$X_i Y_i$
0.14285714	0.02040816	3.44827586	0.49261084
0.11111111	0.01234568	2.70270270	0.30030030
0.06666667	0.00444444	2.08333333	0.13888889
0.04000000	0.00160000	1.53846154	0.06153846
0.02500000	0.00062500	1.25000000	0.03125000
0.01333333	0.00017778	1.03092784	0.01374570
0.01000000	0.00010000	1.01010101	0.01010101
0.00666667	0.00004444	0.93457944	0.00623053
0.00625000	0.00003906	0.84745763	0.00529661
0.00526316	0.00002770	0.73529412	0.00386997
0.00500000	0.00002500	0.54945055	0.00274725
$\sum =$ 0.43214808	0.03983727	16.13058402	1.06657956

$n = 11$

$\sum X_i = \sum 1/f_i = 0.43214808$ $\qquad$ $\sum Y_i = \sum 1/k_i = 16.13058402$

$\sum X_i^2 = 0.03983727$ $\qquad$ $\sum X_i Y_i = 1.06657956$

Diperoleh sistem persamaan lanjar:

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.43214808 \\ 0.43214808 & 0.039832727 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.13058402 \\ 1.06657956 \end{bmatrix}$$

Solusi SPL tersebut adalah

$a = 0.72249892$

$b = 18.93586082$

Dari persamaan laju pertumbuhan jenuh:

$k = (k_{maks} f)/(K + f)$

diperoleh:

$k_{maks} = 1/a = 1.38408511$

$K = b\, k_{maks} = 26.20884299$

Jadi,

$$k = \frac{1.38408511 f}{26.20884299 + f}$$

Jika kita mengerjakan apa yang bisa kita kerjakan,
maka Tuhan mengerjakan apa yang tidak bisa kita kerjakan.
(Majalah Intisari)

Soal Latihan

1. Diberikan pasangan nilai x dan $f(x)$, $f(x)$ tidak diketahui, sebagai berikut :

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

(a) Berapa derajat polinom yang dengan *tepat* melalui ketujuh titik data tersebut ?

(b) Berapa derajat polinom yang *terbaik* untuk menginterpolasi ketujuh titik data tersebut ?

(c) Dengan derajat terbaik yang anda nyatakan dalam jawaban (b), tentukan nilai fungsi di x = 0.58 dengan polinom interpolasi :

(ii) *Lagrange*
(iii) *Newton*
(iv) *Newton-Gregory Maju*
(v) *Newton-Gregory Mundur*

Pilihlah titik-titik yang meminimumkan galat interpolasi.

(d) Hitung taksiran galat dalam menghitung f(0.8) dengan polinom (ii), (iii), (iv).

(e) Dengan teknik interpolasi balikan, tentukan nilai x sehingga $f(x)$ = 0.200

2. (a) Perlihatkan untuk interpolasi kubik bahwa :

$$|E_3(x)| = |f(x) - p_3(x)| \leq h^4/27 \max |f^{(4)}(c)| , \quad x_0 \leq c \leq x_3$$

yang dalam hal ini $p_3(x)$ adalah polinom interpolasi derajat 3 yang menginterpolasi

$x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, dan $x_3 = 3h$.

(b) Tentukan h (jarak antar titik) untuk titik-titik yang berjarak sama dari fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ antara $x = 1$ sampai $x = 2$ sehingga interpolasi polinom kubik dalam daftar nilai itu mempunyai galat kurang dari 0.000001. Berapa jumlah titik data dengan h sebesar itu ?

3. Dengan menggunakan jumlah angka bena yang ditentukan, buatlah tabel selisih maju untuk fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ pada

   (i) selang [1.00,1.06] , $h = 0.01$, banyak angka bena = 5
   (ii) selang [1.00,1.30], $h = 0.01$, banyak angka bena = 6

   Untuk masing-masing (i) dan (ii), dengan polinom derajat berapakah $f(x)$ diinterpolasi secara teliti?

4. Tabel tan(x) , x dalam radian, mempunyai h =0.1. Dekat $x = \pi/2$, fungsi tangen naik sangat cepat dan disini interpolasi lanjar tidak sangat teliti. Dengan polinom derajat berapa yang dibutuhkan untuk menginterpolasi x =1.506 (4 angka bena) ?

5. Tentukan polinom yang menghampiri $f(x) = x/\sqrt{x}$ dalam selang [2.0 , 4.0] , ambil $h = 0.5$, lima angka bena.

6. Apakah interpolasi Newton-Gregory mundur dapat ditulis dengan menggunakan tabel selisih maju? Jika dapat jelaskan bagaimana caranya.

7. Uraikan cara memperoleh rumus polinom Newton-Gregory Mundur !

8. Misalkan f adalah fungsi yang menerus dan dapat di-diferensialkan dalam [$-h$, $2h$], dan $f_i = f(ih)$. Dengan bantuan deret Taylor, tentukan tetapan a dan b yang meminimumkan galat interpolasi berikut :

   $$f_{1/2} \approx a(f_0 + f_1) + b(f_{-1} + f_2)$$

   Perlihatkan bahwa galatnya kira-kira $\alpha f_{1/2}^{(4)}$, dengan α bernilai tetap. Tentukan nilai α itu

9. Fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

tampaknya rumit dan sukar di-integralkan secara analitik dalam selang [0,0.9]. Cara yang mudah adalah dengan menghampiri $f(x)$ dengan polinom interpolasi, misalnya dengan polinom derajat tiga ($p_3(x)$), yang dalam hal ini jarak antar titik adalah

h = (0.9 - 0)/3 = 0.3.

Selanjutnya

$$\int_0^{0.9} f(x)dx \approx \int_0^{0.9} p_3(x)dx$$

Hitunglah integral $f(x)$ di dalam selang [0,0.9] dengan cara tersebut. Polinom interpolasi yang digunakan terserah anda.

10. Diberikan titik-titik yang absisnya berjarak sama (h), yaitu $(0,f(h))$, $(h,f(h))$, $(2h,f(2h))$, dan $(3h,f(3h))$. Untuk $x = 3h/3$, perlihatkan bahwa nilai interpolasinya dengan polinom Lagrange derajat tiga adalah

$$p_3(3h/2) = -0.0625 \{ f(0) + f(3h) \} + 0.5625 \{ f(h) + f(2h) \}$$

11. Tentukan fungsi lanjar yang mencocokkan titik-titik data berikut dengan metode regresi:

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
y	2.0	3.2	4.1	4.9	5.9

12. Diberikan titik-titik (x, y) sebagai berikut:

x	1	2	3	4	5
y	0.6	0.9	4.3	7.6	12.6

(a) Cocokan titik-titik di tabel masing-masing dengan fungsi $f(x) = Ce^{bx}$ dan $f(x) = Cx^b$

(b) Hitung deviasi = $y_i - f(x_i)$, kemudian tentukan galat RMS nya. Berdasarkan galat RMS, fungsi hampiran mana yang terbaik?