Bab 4

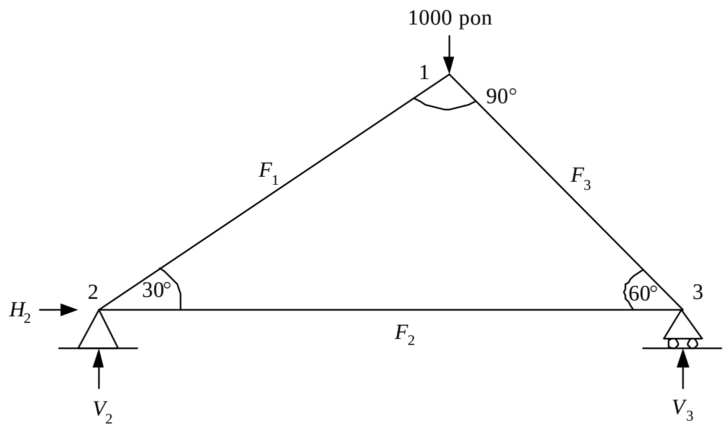
Solusi Sistem Persamaan Lanjar

Saya tidak dapat memastikan bahwa perubahan akan memperbaiki sesuatu, tetapi
saya dapat memastikan bahwa untuk menjadi
lebih baik sesuatu harus berubah
(George C. Lichtenberg)

Dalam praktek rekayasa, perilaku sistem dimodelkan dalam persamaan matematika. Seringkali jumlah persamaan tersebut lebih dari satu dan harus diselesaikan secara serempak atau simultan. Di dalam Bab 3 sudah diberikan contoh penyelesaian sistem dengan dua buah persamaan nirlanjar. Jika sistem persamaan yang dihasilkan berbentuk aljabar lanjar (*linier*), maka diperlukan teknik penyelesaian yang lain. Contoh di bawah ini memberi gambaran sistem persamaan lanjar dalam bidang rekayasa sipil [CHA91].

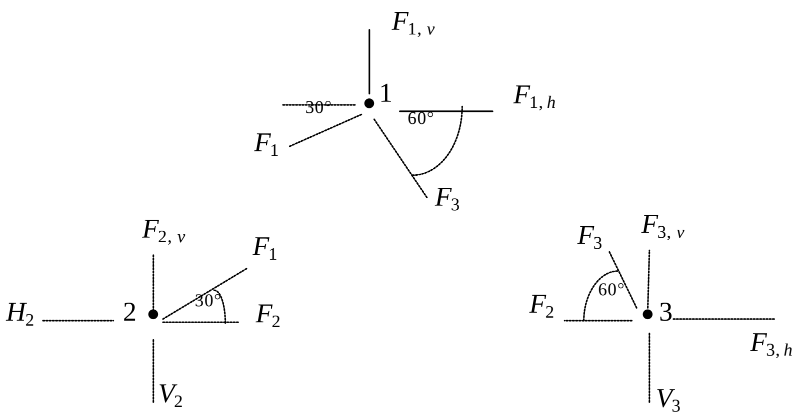
Misalkan seorang insinyur Teknik Sipil merancang sebuah rangka statis yang berbentuk segitiga (Gambar 4.1). Ujung segitiga yang bersudut 30° bertumpu pada sebuah penyangga statis, sedangkan ujung segitiga yang lain bertumpu pada penyangga beroda.

Rangka mendapat gaya eksternal sebesar 1000 pon. Gaya ini disebar ke seluruh bagian rangka. Gaya F menyatakan tegangan atau kompresi pada anggota rangka. Reaksi eksternal (H_2 , V_2 , dan V_3) adalah gaya yang mencirikan bagaimana rangka berinteraksi dengan permukaan pendukung. Engsel pada simpul 2 dapat menjangkitkan gaya mendatar dan tegak pada permukaan, sedangkan gelinding pada simpul 3 hanya menjangkitkan gaya tegak.



Gambar 4.1 Gaya-gaya pada rangka statis tertentu

Struktur jenis ini dapat diuraikan sebagai sistem persamaan aljabar lanjar simultan. Diagram gaya-benda-bebas diperlihatkan untuk tiap simpul dalam Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Diagram gaya-benda-bebas untuk simpul-simpul rangka statis

Menurut hukum Newton, resultan gaya dalam arah mendatar maupun tegak harus nol pada tiap simpul, karena sistem dalam keadaan diam (statis). Oleh karena itu, untuk simpul 1,

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30° + F_3 \cos 60° + F_{1,h}$$
$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30° - F_3 \sin 60° + F_{1,v}$$

untuk simpul 2,

$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30° + F_{2,h} + H_2$$
$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30° - F_{2,v} + V_2$$

dan untuk simpul 3,

$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60° + F_{3,h}$$
$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60° + F_{3,v} + V_3$$

Gaya 1000 pon ke bawah pada simpul 1 berpadanan dengan $F_{1,v}$ = -1000, sedangkan semua $F_{i,v}$ dan $F_{i,h}$ lainnya adalah nol. Persoalan rangka statis ini dapat dituliskan sebagai sistem yang disusun oleh enam persamaan lanjar dengan 6 peubah yang tidak diketahui:

$$\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30° + F_3 \cos 60° + F_{1,h} = -0.866F_1 + 0.5\, F_3$$
$$\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30° - F_3 \sin 60° + F_{1,v} = -0.5F_1 - 0.866\, F_3 + 1000$$
$$\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30° + F_{2,\mathrm{h}} + H_2 = F_2 + 0.866F_1 + 0 + H_2$$
$$\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30° - F_{2,v} + V_2 = 0.5\, F_1 + V_2$$
$$\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60° + F_{3,h} = -F_2 - 0.5\, F_3$$
$$\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60° + F_{3,v} + V_3 = 0.866\, F_3 + V_3$$

Keenam persamaan di atas ditulis ulang kembali dalam susunan yang teratur berdasarkan urutan peubah F_1, F_2, F_3, H_2, V_2, V_3:

$$\begin{array}{llllll}
-0.866F_1 & & +\ 0.5\, F_3 & & & = 0 \\
\quad -0.5F_1 & & -\ 0.866\, F_3 & & & = -1000 \\
-0.866F_1 & -\ F_2 & & -\ H_2 & & = 0 \\
\quad -0.5\, F_1 & & & & -\ V_2 & = 0 \\
 & -\ F_2 & -\ 0.5\, F_3 & & & = 0 \\
 & & -0.866\, F_3 & & -\ V_3 & = 0
\end{array}$$

atau dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.866 & 0 & 0 & 0 \\ -0.866 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.866 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ H_2 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Masalah yang ditanyakan adalah nilai F_1, F_2, F_3, H_2, V_2, dan V_3 yang memenuhi keenam persamaan tersebut secara simultan. Metode penyelesian sistem persamaan lanjar seperti di atas merupakan pokok bahasan Bab 4 ini.

4.1 Bentuk Umum Sistem Persamaan Lanjar

Sistem persamaan lanjar (SPL) dengan dengan n peubah dinyatakan sebagai

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad \text{(P.4.1)}
$$

Dengan menggunakan perkalian matriks, kita dapat menulis (P.4.1) sebagai persamaan matriks

$$Ax = b \qquad \text{(P.4.2)}$$

yang dalam hal ini,

$A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$
$x = [x_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$
$b = [b_j]$ adalah matriks berukuran $n \times 1$ (disebut juga vektor kolom)

yaitu

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\
\vdots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Solusi (P.4.1) adalah himpunan nilai x_1, x_2, …, x_n yang memenuhi n buah persamaan. Metode penyelesaian sistem persamaan lanjar dengan determinan (aturan Cramer) tidak praktis untuk sistem yang besar. Beberapa metode penyelesaian praktis sistem persamaan lanjar yang kita bahas di sini adalah:

1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Metode dekomposisi *LU*

5. Metode lelaran Jacobi
6. Metode lelaran Gauss-Seidel.

Walaupun metode penyelesaian SPL beragam, namun sebagian besar metode tersebut, terutama metode 1 sampai 4, tetap didasarkan kepada metode yang paling dasar, yaitu eliminasi Gauss. Metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan metode dekomposisi *LU* merupakan bentuk variasi lain dari metode eliminasi Gauss. Sedangkan metode lelaran Jacobi dan metode lelaran Gauss-Seidel dikembangkan dari gagasan metode lelaran pada solusi persamaan nirlanjar.

4.2 Metode Eliminasi Gauss

Metode ini berangkat dari kenyataan bahwa bila matriks A berbentuk *segitiga atas* seperti sistem persamaan berikut ini

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

maka solusinya dapat dihitung dengan **teknik penyulihan mundur** (*backward substitution*):

$$a_{nn} x_n = b_n \quad \rightarrow \quad x_n = b_n / a_{nn}$$

$$a_{n-1,\, n-1} x_{n-1} + a_{n-1,\, n} x_n = b_{n-1} \quad \rightarrow \quad x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,\, n-2} x_{n-2} + a_{n-2,\, n-1} x_{n-1} + a_{n-2,\, n} x_n = b_{n-2} \quad \rightarrow \quad x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n-1} x_{n-1} - a_{n-2,n} x_n}{a_{n-2,n-2}}$$

$$\vdots$$

dst.

Sekali x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{k+1} diketahui, maka nilai x_k dapat dihitung dengan

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}} \quad , k = n-1, n-2, ..., 1 \text{ dan } a_{kk} \neq 0. \qquad \text{P.4.3)}$$

Kondisi $a_{kk} \neq 0$ sangat penting, sebab bila $a_{kk} = 0$, persamaan (P.4.3) mengerjakan pembagian dengan nol. Apabila kondisi tersebut tidak dipenuhi, maka SPL tidak mempunyai jawaban.

Di dalam Bab 4 ini, kita menggunakan struktur data matriks untuk semua algoritma yang dijelaskan nanti. Pendeklarasiannya adalah sebagai berikut ini:

```
(* KAMUS GLOBAL *)
const
   n = … ; { ukuran matriks A }
type
   matriks = array[1..n, 1..n] of real;
   vektor = array[1..n] of real;
var
   { larik/matriks yang digunakan untuk sistem Ax = b }
   A : matriks;
   b : vektor;
   x : vektor;
```

Program 4.1 berikut berisi algoritma penyulihan mundur.

Program 4.1 Penyulihan Mundur

```
procedure Sulih_Mundur(A : matriks; b : vektor; n: integer;
                       var x : vektor);
{ Menghitung solusi sistem persamaan lanjar yang sudah berbentuk matriks
  segitiga atas
  K.Awal : A adalah matriks yang berukuran n ´ n, elemennya sudah terdefinisi
          harganya; b adalah vektor kolom yang berukuran n ´ 1.
  K.Akhir: x berisi solusi sistem persamaan lanjar.
}
var
    j, k: integer;
    sigma: real;
begin
   x[n]:=b[n]/a[n,n];
   for k:=n-1 downto 1 do begin
        sigma:=0;
        for j:=k+1 to n do
           sigma:=sigma + a[k, j] * x[j];
        {endfor}
        x[k]:= (b[k] - sigma )/a[k, k];
   end;
end;
```

Contoh 4.1

[MAT92] Selesaikan sistem persamaan lanjar berikut dengan teknik penyulihan mundur

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 20 \\ -2x_2 + 7x_3 - 4x_4 &= -7 \\ 6x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$x_4 = 6/3 = 2$

$$x_3 = \frac{(4 - 5(2)) = -1}{6}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 7(-1) + 4(2) = -4}{-2}$$

$$x_1 = \frac{20 + 1(-4) - 2(-1) - 3(2) = 3}{4}$$

Jadi, solusinya adalah $x = (3, -4, -1, 2)^T$. ■

Metode eliminasi Gauss pada prinsipnya bertujuan mentransformasi sistem $Ax = b$ menjadi sistem

$$Ux = y \qquad \text{(P.4.4)}$$

dengan U adalah matriks *segitiga atas*. Selanjutnya solusi x dapat dihitung dengan teknik penyulihan mundur. Contohnya pada sistem dengan 4 persamaan lanjar berikut (Elemen matriks A dan vektor kolom b disatukan dalam bentuk satu bentuk matriks):

$$\underset{[A,\,b]}{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}\right]} \xrightarrow[\text{menjadi } [U,\, y]]{\text{dieliminasi}} \underset{[U,\,y]}{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} & b_4^{(3)} \end{array}\right]}$$

Tanda pangkat (1), (2), (3) menunjukkan bahwa elemen matriks A telah berubah satu kali, dua kali, dan tiga kali.

Proses eliminasi terdiri atas tiga operasi baris elementer:

1. *Pertukaran* : Urutan dua persamaan dapat ditukar karena pertukaran tersebut tidak mempengaruhi solusi akhir.
2. *Penskalaan* : Persamaan dapat dikali dengan konstanta bukan nol, karena perkalian tersebut tidak mempengaruhi solusi akhir.
3. *Penggantian* : Persamaan dapat diganti dengan penjumlahan persamaan itu dengan gandaan persamaan lain. Misalnya persamaan diganti dengan selisih persamaan itu dengan dua kali persamaan lain; yaitu

$$baris_r := baris_r - m_{p,r}\, baris_p \qquad \text{(P.4.5)}$$

Nilai $a_{r,\ r}$ pada posisi $(r,\ r)$ yang digunakan untuk mengeliminasi x_r pada baris $r + 1,\ r + 2,\ \ldots,\ N$ dinamakan elemen *pivot* dan persamaan pada baris ke-r disebut **persamaan *pivot*** [MAT92]. Ada kemungkinan *pivot* bernilai nol sehingga pembagian dengan nol tidak dapat dielakkan. Tata-ancang eliminasi yang tidak mempedulikan nilai *pivot* adalah tatancang yang naif (*naive*) atau sederhana. Metode eliminasi Gauss seperti ini dinamakan **metode eliminasi Gauss naif** (*naive Gaussian elimination*), karena metodenya tidak melakukan pemeriksaan kemungkinan pembagian dengan nol. Pada metode eliminasi Gauss naif tidak ada operasi pertukaran baris dalam rangka menghindari *pivot* yang bernilai nol itu.

PIVOT: Critical, cardinal, or crucial factor
(Kamus Webster)

Contoh 4.2

Selesaikan sistem persamaan lanjar dengan metode eliminasi Gauss naif:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - {}^4/_2\, R_1 \\ \sim \\ R_3 - {}^{-2}/_2\, R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_3 - {}^6/_{-2}\, R_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Keterangan: (i) elemen yang dicetak tebal menyatakan *pivot*.
(ii) simbol "~" menyatakan operasi baris elementer .
(iii) R_i menyatakan baris (*row*) ke-i

(iv) $R_2 - {}^4/_2\, R_1$ artinya elemen-elemen pada baris kedua dikurangi dengan dua kali elemen-elemen pada baris ke satu.

$$
\begin{array}{lcrrrrl}
R_2 & : & 4 & 4 & -3 & 3 & \\
2R_1 & : & 4 & 6 & -2 & 10 & - \\
\hline
R_2 - {}^4/_2\, R_1 & : & 0 & -2 & -1 & -7 & \text{(menjadi elemen baris ke-2)}
\end{array}
$$

Solusi sistem diperoleh dengan teknik penyulihan mundur sebagai berikut:

$$
\begin{array}{rcl}
-5x_3 = -15 & \rightarrow & x_3 = 3 \\
-2x_2 - x_3 = -7 & \rightarrow & x_2 = (-7 + 3)/-2 = 2 \\
2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 & \rightarrow & x_1 = (5 + 3 - 6)/2 = 1
\end{array}
$$

Jadi, solusinya adalah $x = (1, 2, 3)^T$ ■

Program 4.2 Metode Eliminasi Gauss Naif

```
procedure Eliminasi_Gauss_Naif(A : matriks; b : vektor; n:integer;
                                 var x : vektor);
{ Menghitung solusi sistem persamaan lanjar Ax = b
 K.Awal : A adalah matriks yang berukuran n ´ n, elemennya sudah terdefi-
          nisi harganya; b adalah vektor kolom yang berukuran n ´ 1
 K.Akhir: x berisi solusi sistem
}
var
  i; k, j : integer;
  m: real;
begin
    for k:=1 to n-1 do {mulai dari baris pivot 1 sampai baris pivot n-1}
    begin
        for i:=(k+1) to n do {eliminasi mulai dari baris k+1 sampai baris n}
        begin
           m:=a[i,k]/a[k,k]; {hitung faktor pengali}
           for j:=k to n do  {eliminasi elemen dari kolom k sampai kolom n}
                a[i,j]:=a[i,j] - m*a[k,j];
           {endfor}
           b[i]:=b[i] - m*b[k]; {eliminasi elemen vektor b pada baris i}
        end;
   end;
 Sulih_Mundur(A, b, n, x);  {dapatkan solusinya dengan teknik penyulihan
                              mundur)
end;
```

Kelemahan eliminasi Gauss naif

Jika *pivot* $a_{pp} = 0$, baris ke-k tidak dapat digunakan untuk memgeliminasi elemen pada kolom p, karena terjadinya pembagian dengan nol. Oleh karena itu, *pivot* yang bernilai nol harus dihindari dengan tata-ancang (*strategy*) *pivoting*.

4.2.1 Tata-ancang *Pivoting*

Prinsip tata-ancang *pivoting* adalah sebagai berikut: jika $a_{p,p}^{(p-1)} = 0$, cari baris k dengan $a_{k,p} \neq 0$ dan $k > p$, lalu pertukarkan baris p dan baris k. Metode eliminasi Gauss dengan tata-ancang pivoting disebut metode eliminasi Gauss yang diperbaiki (*modified Gaussian elimination*).

Contoh 4.3

Selesaikan sistem persamaam lanjar berikut dengan metode eliminasi Gauss yang menerapkan tatancang *pivoting*.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2\\
3x_1 + 6x_2 &= 9\\
2x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 0 & 9\\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{array}\right]
\begin{array}{c} R_2 - {}^3/_1 R_1\\ \sim\\ R_3 - {}^2/_1 R_1 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & \mathbf{0} & -3 & 3\\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right]
\begin{array}{c} R_3 \Leftrightarrow R_3\\ (*)\\ \ \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]
$$

operasi baris 1 operasi baris 2

Setelah operasi baris 1, elemen a_{22} yang akan menjadi *pivot* pada operasi baris 2 ternyata sama dengan nol. Karena itu, pada operasi baris 2, elemen baris 2 dipertukarkan dengan elemen baris 3. Tanda (*) menyatakan pertukaran baris terjadi akibat proses *pivoting*. Sekarang elemen $a_{22} = 4 \neq 0$ sehingga operasi baris elementer dapat diteruskan. Tetapi, karena matriks A sudah membentuk matriks U, proses eliminasi selesai. Solusinya diperoleh dengan teknik penyulihan mundur, yaitu $x_3 = -1$, $x_2 = 1$, dan $x_1 = 1$.

■

Melakukan pertukarkan baris untuk menghindari *pivot* yang bernilai nol adalah cara *pivoting* yang sederhana (*simple pivoting*). Masalah lain dapat juga timbul bila elemen *pivot* sangat dekat ke nol, karena jika elemen *pivot* sangat kecil dibandingkan terhadap elemen lainnya, maka galat pembulatan dapat muncul [CHA91]. Ingatlah kembali bahwa kita bekerja dengan mesin (komputer) yang beroperasi dengan pembulatan bilangan riil. Jadi, disamping menghindari pembagian dengan nol, tatancang *pivoting* dapat juga diperluas untuk mengurangi galat pembulatan.

Ada dua macam tatancang *pivoting*:

1. *Pivoting* sebagian (*partial pivoting*)

   Pada tatancang *pivoting* sebagian, *pivot* dipilih dari semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar,

   $$| a_{k,p} | = \max\{|a_{p,p}|, |a_{p+1,p}|, \ldots, |a_{n-1,p}|, |a_{n,p}|\}$$

   lalu pertukarkan baris ke-k dengan baris ke-p. Misalkan setelah operasi baris pertama diperoleh matriksnya seperti yang digambarkan pada matriks di bawah ini. Untuk operasi baris kedua, carilah elemen x pada kolom kedua, dimulai dari baris ke-2 sampai baris ke-4, yang nilai mutlaknya terbesar, lalu pertukarkan barisnya dengan baris kedua. Elemen x yang nilai mutlaknya terbesar itu sekarang menjadi *pivot* untuk operasi baris selanjutnya.

   $$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right]$$

   Cari $|x|$ terbesar, lalu pertukarkan barisnya dengan baris ke-2

   Perhatikanlah bahwa teknik *pivoting* sebagian juga sekaligus menghindari pemilihan *pivot* = 0 (sebagaimana pada *simple pivoting*) karena 0 tidak akan pernah menjadi elemen dengan nilai mutlak terbesar, kecuali jika seluruh elemen di kolom yang diacu adalah 0. Apabila setelah melakukan *pivoting* sebagian ternyata elemen *pivot* = 0, itu berarti sistem persamaan lanjar tidak dapat diselesaikan (*singular system*).

2. *Pivoting* lengkap (*complete pivoting*)

   Jika disamping baris, kolom juga diikutkan dalam pencarian elemen terbesar dan kemudian dipertukarkan, maka tatancang ini disebut *pivoting lengkap.* *Pivoting* lengkap jarang dipakai dalam program sederhana karena pertukaran kolom mengubah urutan suku x dan akibatnya menambah kerumitan program secara berarti [CHA91].

Contoh 4.4

Dengan menggunakan empat angka bena, selesaikan sistem persamaan berikut dengan metode eliminasi Gauss:

$$0.0003x_1 + 1.566x_2 = 1.569$$
$$0.3454x_1 - 2.436x_2 = 1.018$$

(a) tanpa tatancang *pivoting* sebagian (Gauss naif)
(b) dengan tatancang *pivoting* sebagian (Gauss yang dimodifikasi)

(Perhatikan, dengan 4 angka bena, solusi sejatinya adalah $x_1 = 10.00$ dan $x_2 = 1.00$}

Penyelesaian:

(a) tanpa tatancang *pivoting* sebagian:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0.0003} & 1.566 & 1.569 \\ 0.3454 & -2.436 & 1.018 \end{array}\right]$$

Operasi baris pertama (0.0003 sebagai *pivot*):

$$R_2 \leftarrow \frac{R_2 - 0.3454R_1}{0.0003} = R_2 - 1151\,R_1$$

(tanda "←" berarti "diisi" atau "diganti dengan")

Jadi,

$$a_{21} \approx 0$$
$$a_{22} \approx -2.436 - (1151)(1.566) \approx -2.436 - 1802 \approx -1804$$
$$b_2 \approx 1.018 - (1151)(1.569) \approx 1.018 - 1806 \approx -1805$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0.3454 & -2.436 & 1.018 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_2 - 1151R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 0.0003 & 1.566 & 1.569 \\ 0 & -1804 & -1805 \end{array}\right]$$

Solusinya diperoleh dengan teknik penyulihan mundur:

$$x_2 = -1805/-1804 = 1.001$$
$$x_1 = \frac{1.569 - (1.566)(1.001)}{0.0003} = \frac{1.569 - 1.568}{0.0003} = \frac{0.001}{0.0003} = 3.333$$

(jauh dari solusi sejati)

Jadi, $x = (3.333, 1.001)^T$. Solusi ini sangat jauh berbeda dengan solusi sejatinya. Kegagalan ini terjadi karena $|a_{11}|$ sangat kecil dibandingkan $|x_{12}|$, sehingga galat pembulatan yang kecil pada x_2 menghasilkan galat besar di x_1. Perhatikan juga bahwa 1.569 - 1.568 adalah pengurangan dua buah bilangan yang hampir sama, yang menimbulkan hilangnya angka bena pada hasil pengurangannya (*loss of significance*).

(b) dengan tata-ancang *pivoting* sebagian

Baris pertama dipertukarkan dengan baris kedua sehingga 0.3454 menjadi pivot

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0.3454} & -2.436 & 1.018 \\ 0.0003 & 1.566 & 1.569 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - {}^{0.0003}/_{0.3454}\, R_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 0.3454 & -2.436 & 1.018 \\ 0 & 1.568 & 1.568 \end{array}\right]$$

Dengan teknik penyulihan mundur diperoleh

$x_2 = 1.568/1.568 = 1.000$

$$x_1 = \frac{1.018 - (-2.436)(1.000)}{0.3454} = 10.02 \text{ (lebih baik daripada solusi (a))}$$

Jadi, solusinya adalah $x = (10.02,\ 1.000)^T$, yang lebih baik daripada solusi (a). Keberhasilan ini karena $|a_{21}|$ tidak sangat kecil dibandingkan dengan $|a_{22}|$, sehingga galat pembulatan yang kecil pada x_2 tidak akan menghasilkan galat yang besar pada x_1.

■

Contoh 4.5

Dengan menggunakan empat angka bena, selesaikan sistem persamaan berikut ini dengan metdoe eliminasi Gauss:

$$1.133x_1 + 5.281x_2 = 6.414$$
$$24.14x_2 - 1.210x_2 = 22.93$$

(a) tanpa tatancang *pivoting* sebagian (Gauss naif)
(b) dengan tatancang *pivoting* sebagian

(Perhatikan, dengan 4 angka bena, solusi sejatinya adalah $x_1 = x_2 = 1.000$)

Penyelesaian:

(a) tanpa tatancang *pivoting* sebagian

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1.133} & 5.281 & 6.414 \\ 24.14 & 1.210 & 22.93 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - ({}^{24.14}/_{1.133})R_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1.133 & 5.281 & 6.414 \\ 0 & -113.7 & -113.8 \end{array}\right]$$

Solusinya diperoleh dengan teknik penyulihan mundur:

$x_2 = -113.8/-113.7 = 1.001$

$$x_1 = \frac{6.414 - (5.281)(1.001)}{1.133} = 0.9956$$

Jadi, x = (0.9956, 1.001)^T. Solusi ini kurang teliti dibandingkan dengan solusi sejatinya

(b) dengan tatancang *pivoting* sebagian

Baris ke-1 dipertukarkan dengan baris ke-2, sehingga 24.14 menjadi *pivot*.

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{24.14} & 1.210 & 22.93 \\ 1.133 & 5.281 & 6.414 \end{array}\right] \; R_2 - (^{1.133}/_{24.14})R_1 \; \left[\begin{array}{cc|c} 24.14 & -1.210 & 22.93 \\ 0 & 5.338 & 5.338 \end{array}\right]$$

Dengan teknik penyulihan mundur, solusinya adalah

x_2 = 5.338/5.338 = 1.000

$$x_1 = \frac{22.93 + (1.210)(1.000)}{24.14} = 1.000$$

Jadi, x = (1.000, 1.000)^T. Solusi ini tepat sama dengan solusi sejatinya, jadi lebih baik daripada solusi (a) di atas. ■

Contoh 4.4 dan Contoh 4.5 di atas memperlihatkan bahwa dengan tatancang *pivoting* sebagian galat pembulatan dapat dikurangi. Contoh lainnya untuk sistem dengan tiga persamaan berikut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \end{array}\right] \underset{(*)}{R_1 \Leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{6} & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - {}^2/_6 R_1 \\ R_3 - {}^4/_6 R_1 \\ \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & 6 & -5 & 6 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.666 & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.333 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{(*)}{R_2 \Leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & 6 & -5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & 11 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \text{dst ...}$$

Metode eliminasi Gauss yang diperbaiki (tidak naif) adalah metode eliminasi Gauss yang melibatkan operasi pertukaran baris dalam rangka memilih elemen *pivot* dengan nilai mutlak terbesar. Program 4.3 berikut berisi algoritma eliminasi Gauss yang diperbaiki.

Program 4.3 Metode Eliminasi Gauss yang diperbaiki (dengan tatancang *pivoting*)

```
procedure Eliminasi_Gauss(A : matriks; b : vektor; n:integer;
                          var x : vektor);
{ Menghitung solusi sistem persamaan lanjar Ax = b dengan metode eliminasi
  Gauss yang diperbaiki.
  K.Awal : A adalah matriks yang berukuran n ´ n, elemennya sudah terdefinisi
           harganya; b adalah vektor kolom yang berukuran n ´ 1
  K.Akhir: x berisi solusi sistem. Jika tidak ada solusi yang unik, vektor
           x diisi dengan nilai -9999
}

var
   i, k, j, r, s, t : integer;
   m, tampung, pivot : real;
   singular : boolean;        { true jika SPL tidak mempunyai solusi }


begin
   k:=1; singular:=false;
   while (k<=n-1) and (not singular) do
     begin
       {cari elemen pivot dengan nilai mutlak terbesar}
        pivot:=a[k,k]; r:=k;   {baris pivot}
        for t:=k+1 to n do  {bandingkan dengan elemen pada baris k+1 ..n}
          if ABS(a[t,k]) > ABS(pivot) then
           begin
              pivot:=a[t,k]; r:=t;
           end {if} ;
        {jika pivot=0 maka matriks A singular. Proses dihentikan}
        if pivot = 0 then   { atau hampir nol, gunakan suatu epsilon }
           singular:=true
      else
         begin
           if r > k then  {jika pivot tetap pada baris k, tidak ada
                           pertukaran}
            begin
               {pertukarkan baris k dengan baris r di matriks A}


                for s:=1 to n do
                 begin
                      tampung:=a[k,s]; a[k,s]:=a[r,s]; a[r,s]:=tampung;
                 end;

              {pertukarkan juga b[k] dengan b[r]}
              tampung:=b[k]; b[k]:=b[r]; b[r]:=tampung;
            end {if} ;
         for i:=(k+1) to n do {eliminasi dari baris k+1 sampai
                                baris n}
           begin
               m:=a[i,k]/a[k,k]; {hitung faktor pengali}
               for j:=k to n do  {eliminasi dari kolom k sampai kolom n}
                     a[i,j]:=a[i,j] - m*a[k,j];
```

```
            {endfor}
            b[i]:=b[i] - m*b[k];    {eliminasi vektor b pada baris i}
         end {for} ;
       end {if} ;
       k:=k+1;
   end {while};
   { k = n or singular }

   if not singular then
      Sulih_Mundur(A, b, n, x); {dapatkan solusinya dengan teknik penyulihan
                                 mundur)
   else
      { solusi tidak ada, tetapi vektor x harus tetap diisi }
      for i:=1 to n do
         x[i]:=-9999;
      {endfor}
   {endif}
end;
```

Untuk hasil terbaik, penerapan tatancang *pivoting* dan penggunaan bilangan berketelitian ganda dapat mengurangi galat pembulatan.

Pertukaran elemen baris, sebagai akibat dari pemilihan *pivot*, memakan waktu, khususnya pada SPL yang berukuran besar. Waktu pertukaran ini dapat dikurangi bila elemen-elemen baris tidak benar-benar ditukar secara aktual. Urutan baris dicatat di dalam larik `BAR[1..n]`. Pertukaran yang dikerjakan hanyalah pertukaran elemen larik `BAR`. Pada mulanya larik `BAR` berisi indeks baris matriks:

```
for i:=1 to n do BAR[i]:=i;
```

Elemen matriks diacu sebagai

```
A[BAR[i], k]
```

Maka, pertukaran baris *k* dan baris *r* dikerjakan sebagai

```
tampung:=BAR[r];
BAR[r]:=BAR[k];
BAR[k]:=tampung;
```

4.2.2 Penskalaan

Selain dengan *pivoting* sebagian, penskalaan (*scaling*) juga dapat digunakan untuk mengurangi galat pembulatan pada SPL yang mempunyai perbedaan koefisien yang mencolok. Situasi demikian sering ditemui dalam praktek rekayasa yang menggunakan ukuran satuan yang berbeda-beda dalam menentukan persamaan simultan. Misalnya pada persoalan rangkaian listrik, tegangan listrik dapat dinyatakan dalam satuan yang berkisar dari mikrovolt sampai kilovolt. Pemakaian satuan yang berbeda-beda dapat menuju ke koefisien yang besarnya sangat berlainan. Ini berdampak pada galat pembulatan, dan karena itu mempengaruhi *pivoting* [CHA91]. Dengan penskalaan berarti kita menormalkan persamaan. Cara menskala adalah membagi tiap baris persamaan dengan nilai mutlak koefisien terbesar di ruas kirinya. Akibat penskalaan, koefisien maksimum dalam tiap baris adalah 1. Cara menskala seperti ini dinamakan dengan **menormalkan** SPL.

Contoh 4.6

Selesaikan sistem persamaan lanjar berikut sampai 3 angka bena dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang menerapkan penskalaan dan tanpa penskalaan:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 100000\,x_2 &= 100000 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(Solusi sejatinya dalam 3 angka bena adalah $x_1 = x_2 = 1.00$)

Penyelesaian:

(i) Tanpa penskalaan :

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{2} & 100000 & 100000 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad R_2 - 1/2\,R_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 100000 & 100000 \\ 0 & -50000 & -50000 \end{array}\right]$$

Solusinya adalah

$x_2 = 1.00$
$x_1 = 0.00$ (salah)

(ii) Dengan penskalaan :

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 100000\,x_2 &= 100000 \\ x_1 \qquad x_2 &= 2 \end{aligned}\right| \begin{array}{l} : 100000 \\ : 1 \end{array} \left| \begin{aligned} 0.00002\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.00002 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} R_1 \Leftrightarrow R_2 \\ (*) \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0.00002 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1.00 \end{array}\right]$$

Solusinya,

$x_2 = 1.00$
$x_1 = 1.00$ (benar)

yang sesuai dengan solusi sejati. Contoh di atas juga memperlihatkna bahwa penskalaan dapat mengubah pemilihan *pivot*. ■

4.2.2 Kemungkinan Solusi SPL

Tidak semua SPL mempunyai solusi. Ada tiga kemungkinan solusi yang dapat terjadi pada SPL:

(a) mempunyai solusi yang unik,
(b) mempunyai banyak solusi, atau
(c) tidak ada solusi sama sekali.

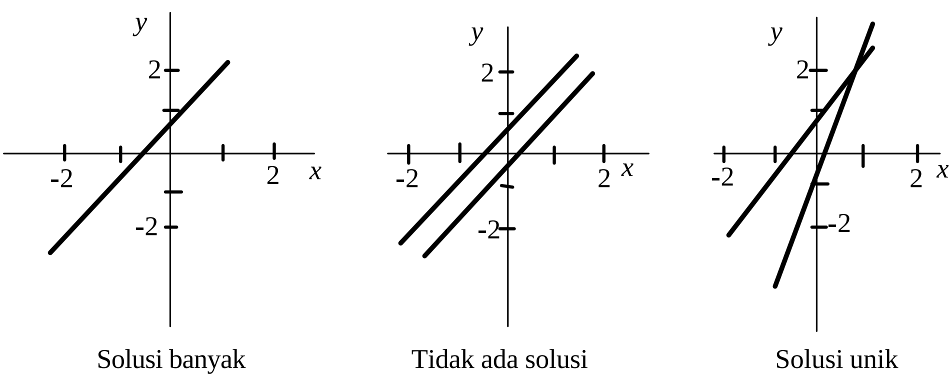
Dengan grafik, ketiga kemungkinan solusi ini diperlihatkan oleh tiga SPL dengan dua persamaan berikut [NAK92]:

(i) $-x + y = 1$
$-2x + 2y = 2$

(ii) $-x + y = 1$
$-x + y = 0$

(iii) $-x + y = 1$
$2x - y = 0$

Grafik ketiga SPL diperlihatkan pada Gambar 4.3. Grafik pertama memperlihatkan bahwa kedua persamaan berimpit pada satu garis lurus. Solusinya terdapat di sepanjang garis tersebut (banyak solusi). Grafik kedua memperlihatkan kedua persamaan menyatakan dua garis yang sejajar. Tidak ada perpotongan kedua garis tersebut (tidak ada solusi). Sedangkan pada grafik ketiga, kedua persamaan berpotongan pada sebuah titik (solusinya tunggal atau unik).



Gambar 4.3 Kemungkinan solusi sistem persamaan lanjar

Untuk SPL dengan tiga buah persamaan atau lebih (dengan tiga peubah atau lebih), tidak terdapat tafsiran geometrinya (tidak mungkin dibuat ilustrasi grafisnya) seperti pada SPL dengan dua buah persamaan. Namun, kita masih dapat memeriksa masing-masing kemungkinan solusi itu berdasarkan pada bentuk matriks akhirnya. Agar lebih jelas, tinjau contoh pada SPL yang disusun oleh tiga persamaan.

1. Solusi unik/tunggal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$

2. Solusi banyak/tidak terhingga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

yang dipenuhi oleh banyak nilai x. Solusinya diberikan dalam bentuk parameter:

Misalkan $x_3 = k$,
maka $x_2 = -6 + 3k$ dan $x_1 = 10 - 5k$, dengan $k \in R$.
Terdapat tidak berhingga nilai k, berarti solusi SPL banyak sekali.

3. Tidak ada solusi

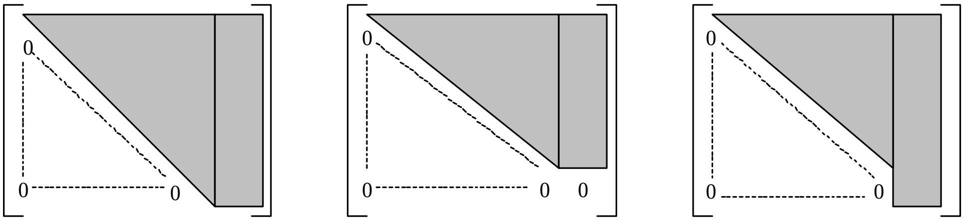
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

yang dalam hal ini, tidak nilai x_i yang memenuhi, i = 1, 2, 3

Bentuk akhir matriks setelah eliminasi Gauss untuk ketiga kemungkinan solusi di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Solusi unik   Solusi banyak   Tidak ada solusi

Kita rangkum "pertanda" kemungkinan solusi SPL di bawah ini:

1. Jika pada hasil eliminasi Gauss tidak terdapat baris yang semuanya bernilai 0 (termasuk elemen pada baris yang bersesuaian pada vektor kolom *b*), maka solusi SPL dipastikan unik.
2. Jika pada hasil eliminasi Gauss terdapat paling sedikit satu baris yang semuanya bernilai 0 (termasuk elemen pada baris yang bersesuaian pada vektor kolom *b*), maka SPL mempunyai banyak solusi.
3. Jika pada hasil eliminasi Gauss terdapat baris yang semuanya bernilai 0 tetapi elemen pada baris yang bersesuaian pada vektor kolom *b* tidak 0, maka SPL tidak mempunyai solusi.

Program eliminasi Gauss harus dapat menangani ketiga kemungkinan solusi tersebut.

4.3 Metoda Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan variasi dari metode eliminasi Gauss. Dalam hal ini, matriks A dieliminasi menjadi matriks identitas I. Di sini tidak diperlukan lagi teknik penyulihan mundur untuk memperoleh solusi SPL. Solusinya langsung diperoleh dari vektor kolom b hasil proses eliminasi.

$$Ax = b \;\rightarrow\; Ix = b'$$

Dalam bentuk matriks, eliminasi Gaus-Jordan ditulis sebagai

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ : & & & & & : \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & b_3' \\ : & & & & & : \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n' \end{array}\right]$$

$$\text{Solusinya:} \quad \begin{array}{llll} x_1 & & & = b_1' \\ & x_2 & & = b_2' \\ & & \ldots & \quad \ldots \\ & & & x_n = b_n' \end{array}$$

Seperti pada metode eliminasi Gauss naif, metode eliminasi Gauss-Jordan naif tidak menerapkan tata-ancang pivoting dalam proses eliminasinya.

Program 4.4 Metode Eliminasi Gauss-Jordan Naif

```
procedure Eliminasi_Gauss_Jordan_Naif(A : matriks; b: vektor; n:integer;
                                      var x : vektor);
{ Menghitung solusi sistem persamaan lanjar Ax = b dengan metode eliminasi
   Gauss-Jordan.
  K.Awal : A adalah matriks yang berukuran n ´ n, elemennya sudah terdefinisi
           harganya; b adalah vektor kolom yang berukuran n ´ 1
  K.Akhir: x berisi solusi sistem
}
var
   i; k, j : integer;
   m, tampung: real;
begin
   for k:=1 to n do
    begin
      tampung:=a[k,k];
      for j:=1 to n do {bagi elemen baris k dengan a[k,k]}
          a[k,j]:=a[k,j]/tampung;
      {endfor}
      b[k]:=b[k]/tampung;   {jangan lupa b[k] juga dibagi dengan a[k,k]}
      for i:=1 to n do      {eliminasi elemen baris i s/d baris n, i¹k}
```

```
        begin
           if i<>k then
           begin
              m:=a[i,k];
              for j:=1 to n do  {eliminasi elemen dari kolom 1 s/d kolom n}
                  a[i,j]:=a[i,j] - m*a[k,j];
              {endfor}
               b[i]:=b[i] - m*b[k]; {eliminasi elemen vektor b pada baris i}
           end;
        end;
   end;
   {Solusi langsung didapat dari vektor kolom b}
   for i:=1 to n do x[i]:=b[i];
end;
```

Seperti halnya metode eliminasi Gauss, tatancang *pivoting* dan penskalaan juga dapat diterapkan pada metoda ini untuk memperkecil galat pembulatan.

Contoh 4.7

[CHA91] Selesaikan sistem persamaan lanjar di bawah ini dengan metode eliminasi Gauss- Jordan.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1/3 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 0.1\,R1 \\ R_3 - 0.3\,R1 \\ \quad\sim \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0 & 7.00333 & -0.2933333 & -19.5617 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_2\,/7.00333 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.0333333 & -0.0666667 & 2.61667 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 - (-0.003333)R_2 \\ R_3 - (-0.190000)R_2 \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 10.01200 & 70.0843 \end{array}\right]$$

$$R_3 / 10.0200 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 - (-0.0680629)\ R_3 \\ R_2 - (-0.0418848)\ R_2 \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3.00000 \\ 0 & 1 & 0 & -2.50001 \\ 0 & 0 & 1 & 7.00003 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 3.00000$
$x_2 = -2.50001$
$x_3 = 7.00003$ ■

Penyelesaian SPL dengan metode eliminasi Gauss-Jordan membutuhkan jumlah komputasi yang lebih banyak daripada metode eliminasi Gauss. Karena alasan itu, metode eliminasi Gauss sudah cukup memuaskan untuk digunakan dalam penyelesaian SPL. Namun metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan dasar pembentukan matriks balikan yang akan dibahas di bawah ini.

Matriks Balikan (*inverse matrices*)

Matriks balikan, A^{-1}, banyak dipakai dalam pengolahan matriks. Misalnya dalam pengukuran statistik, pencocokan fungsi pada data hasil pengamatan menggunakan metode kuadrat terkecil (*least square*). Di sini, nilai A^{-1} memberikan informasi tentang galat mutlak yang dikandung data. Selain itu, matriks balikan juga dapat dipakai untuk menghitung solusi sistem persamaan lanjar (akan dibahas pada metode matriks balikan). Akan ditunjukkan juga bahwa matriks balikan dapat diperoleh dengan metode eliminasi Gauss-Jordan. Tetapi sebelum membahasnya, ingatlah kembali cara menghitung matriks balikan untuk matriks 2×2.

Untuk matriks 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matriks balikannya adalah

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad , \; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Nilai $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ini disebut **determinan**. Determinan dilambangkan dengan dua buah garis tegak (| |). Lebih jauh tentang determinan ini akan dijelaskan pada bagian lain bab ini. Bila determinan A = 0, matriks A tidak mempunya balikan, sehingga dinamakan *matriks singular*. Sistem persamaan lanjar yang mempunyai matriks A singular (sistem singular) tidak mempunyai solusi yang unik, yaitu solusinya banyak atau solusinya tidak ada.

Untuk matriks $n \times n$, matriks balikannya dapat diperoleh dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, yaitu:

$$[\, A \mid I \,] \xrightarrow{\text{eliminasi G - J}} [\, I \mid A^{-1} \,]$$

$$\underset{A}{\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right|}\underset{I}{\left.\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right]} \longrightarrow \underset{I}{\left[\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right|}\underset{A^{-1}}{\left.\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{matrix}\right]}$$

Contoh 4.8

Tentukan matriks balikan dari matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} R_2\text{-}3R_1 \\ \sim \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 0.6 \end{array}\right]$$

Jadi, matriks balikan dari A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & -0.2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Penerapan tata-ancang *pivoting* dan penggunaan bilangan berketelitian ganda dapat memperbaiki hasil matriks balikan.

4.4 Metode Matriks Balikan

Misalkan A^{-1} adalah matriks balikan dari A. Hasil kali A dengan A^{-1} menghasilkan matriks identitas I,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad \text{(P.4.6)}$$

Bila matriks A dikalikan dengan I akan menghasilkan matriks A sendiri,

$$AI = IA = A \qquad \text{(P.4.7)}$$

Berdasarkan dua kesamaan di atas, sistem persamaan lanjar $Ax = b$ dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1} Ax &= A^{-1} b \qquad \{\text{kalikan kedua ruas dengan } A^{-1}\} \\ I x &= A^{-1} b \\ x &= A^{-1} b \qquad \text{(P.4.8)} \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan lanjar $Ax = b$ adalah $x = A^{-1} b$ dengan syarat A^{-1} ada. Cara penyelesaian dengan mengalikan matriks A^{-1} dengan b itu dinamakan **metode matriks balikan**. Tetapi, penyelesaian dengan SPL metode matriks balikan tidak lebih mangkus daripada metode eliminasi Gauss, sebab lebih banyak proses komputasi yang dibutuhkan. Metode matriks balikan baru mangkus bila digunakan untuk penyelesaian sejumlah SPL dengan matriks A yang sama tetapi dengan vektor kolom b yang berbeda-beda:

$Ax = b_{\mathrm{I}}$
$Ax = b_{\mathrm{II}}$
$Ax = b_{\mathrm{III}}$
... dst

Sekali A^{-1} telah diperoleh, maka ia dapat dipakai untuk menyelesaikan sejumlah SPL tersebut.

Contoh 4.9

Selesaikan sistem persamaan lanjar

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 \quad + x_3 &= 10 \\ x_1 \quad + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

dengan metode matriks balikan.

Penyelesaian:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2 - 3R_1 \\ \sim \\ R_3 - R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.2 & 0.6 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

Solusinya adalah $x = A^{-1} b$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & -0.2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 4 - 1 \\ -5 + 0 + 5 \\ 0 - 2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Perlu diperhatikan, apabila selama pembentukan matriks balikan terdapat proses *pivoting* (pertukaran baris), baris-baris pada b juga harus dipertukarkan.

4.5 Metode Dekomposisi LU

Jika matriks A *non-singular* maka ia dapat difaktorkan (diuraikan atau di-dekomposisi) menjadi matriks segitiga bawah L (*lower*) dan matriks segitiga atas U (*upper*):

$$A = LU \qquad \text{(P.4.9)}$$

Dalam bentuk matriks, pemfaktoran ini ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ : & : & : & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ : & & & & : \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ : & & & & : \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Pada matriks segitiga bawah L, semua elemen diagonal adalah 1, sedangkan pada matriks U tidak ada aturan khusus pada elemen diagonalnya[1].

Sebagai contoh, matriks 3×3 di bawah ini difaktorkan menjadi :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Metode pemfaktoran A menajdi L dan U akan dijelaskan kemudian. Sekali A difaktorkan menjadi L dan U, kedua matriks tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan $Ax = b$. Metode penyelesaian SPL dengan cara ini dikenal dengan nama **metode dekomposisi *LU***. Metode ini dinamakan juga **metode pemfaktoran segitiga** (*triangular factorization*). Nanti akan ditunjukkan bahwa metode elimnais Guuss merupakan suatu dekomposisi LU dari matriks A.

Penyelesaian $Ax = b$ dengan metode dekomposisi LU adalah sebagai berikut. Tinjau sistem persamaan lanjar

$$Ax = b$$

Faktorkan A menjadi L dan U sedemikian sehingga

$$A = LU$$

Jadi,

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ LU\,x &= b \qquad \text{(P.4.10)} \end{aligned}$$

[1] Pada beberapa buku, yang tertera adalah kebalikannya: semua elemen diagonal dari matriks U adalah 1, sedangkan elemen diagonal matriks L bebas. Hal ini tidak masalah sebab jika L dan U dikalikan, hasilnya tetap sama dengan matriks A.

Misalkan

$$Ux = y \tag{P.4.11}$$

maka

$$Ly = b \tag{P.4.12}$$

Untuk memperoleh y_1, y_2,…, y_n , kita menggunakan teknik penyulihan maju (*forward substitution*) :

$$Ly = b \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow$$

diperoleh y_1, y_2,…, y_n dengan teknik penyulihan maju

Dan untuk memperoleh solusi SPL, x_1, x_2,…, x_n, kita menggunakan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*):

$$Ux = y \quad \rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & & & & ... \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ : \\ b_n \end{bmatrix}$$

diperoleh x_1, x_2, …, x_n dengan teknik penyulihan mundur

Jadi, langkah-langkah menghitung solusi SPL dengan metode dekomposi *LU* dapat diringkas sebagai berikut:

1. Bentuklah matriks *L* dan *U* dari *A*
2. Pecahkan $Ly = b$, lalu hitung *y* dengan teknik penyulihan maju
3. Pecahkan $Ux = y$, lalu hitung *x* dengan teknik penyulihan mundur

Sama halnya dengan metode matriks balikan, metode dekomposisi *LU* akan mangkus bila digunakan untuk menyelesaikan sejumlah SPL dengan matriks *A* yang sama tetapi dengan *b* berbeda-beda. Sekali *A* difaktorkan menjadi *L* dan *U*, keduanya dapat digunakan untuk menghitung solusi sejumlah SPL tersebut. Metode dekomposisi *LU* merupakan metode yang paling populer untuk memecahkan sistem persamaan lanjar.

Terdapat dua metode untuk memfaktorkan A atas L dan U:

1. Metode LU Gauss.
2. Metode reduksi Crout.

Masing-masing metode pemfaktoran kita bahas di bawah ini.

4.5.1 Pemfaktoran dengan Metode LU Gauss

Walaupun tidak ada hubungannya dengan dekomposisi LU, metode elimianasi Gauss dapat digunakan untuk memfaktorkan A menjadi L dan U (karena itulah metode pemfaktoran ini kita namakan metode LU Gauss). Di dalam upabab ini juga akan ditunjukkan bahwa sebenarnya metode eliminasi Gauss dapat dinyatakan sebagai dekomposisi LU.

Misalkan matriks A berukuran 4×4 difaktorkan atas L dan U,

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Di sini kita menggunakan simbol m_{ij} ketimbang l_{ij}, karena nilai l_{ij} berasal dari faktor pengali (m_{ij}) pada proses eliminasi Gauss. Langkah-langkah pembentukan L dan U dari matriks A adalah sebagai berikut:

1. Nyatakan A sebagai $A = IA$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U. Tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.

3. Setelah seluruh proses eliminasi Gauss selesai, matriks I menjadi matriks L, dan matriks A di ruas kanan menjadi matriks U.

Di bawah ini diberikan dua contoh pemfaktoran A dengan metode ini, masing-masing untuk kasus tanpa *pivoting* dan dengan *pivoting*.

Contoh 4.10 (*LU* Gauss naif)

Faktorkan matriks A berikut dengan metode *LU* Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U, dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - (^{-2}/_4)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (^{1}/_4)R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix}$$

Tempatkan m_{21} = -2/4 = 0.5 dan m_{31}= 1/4 = 0.25 ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 - (^{1.25}/_{-2.5})R_2 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan m_{32} = 1.25/-2.5 = -0.5 ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Contoh 4.11 (*LU* Gauss dengan tata-ancang *pivoting*)

Faktorkan matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lalu pecahkan sistem $Ax = b$.

Penyelesaian:

Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U, dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - (2)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (^1/_1)R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tempatkan m_{21} = 2 dan m_{31}= 1/1 = 1 ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A. Dalam hal ini ada *pivoting* karena calon *pivot* bernilai 0, sehingga baris kedua dipertukarkan dengan baris ketiga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada matriks L, kecuali elemen diagonalnya

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ m_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ m_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada vektor b,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A:

$$R_3 - ({}^0/_2)R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan $m_{32} = 0/2 = 0$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \;\text{——}\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1, y_2, dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:

$$
\begin{array}{lll}
y_1 & = 1 & \\
-y_1 + y_2 & = 1 & \rightarrow\ y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2 \\
2y_1 + 0y_2 + y_3 & = 5 & \rightarrow\ y_3 = 5 - 2y_1 = 3
\end{array}
$$

$$
Ux = y \ \text{———}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

x_1, x_2, dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$$
\begin{array}{lll}
3x_3 & = 3 & \rightarrow\ x_3 = 1 \\
2x_2 + 0x_3 & = 2 & \rightarrow\ x_2 = 1 \\
x_1 + x_2 - x_3 & = 1 & \rightarrow\ x_1 = 1
\end{array}
$$

Jadi, solusi sistem persamaan lanjar di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$. ■

Pertukaran baris untuk matriks yang berukuran besar diperlihatkan oleh matriks di bawah ini:

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\
0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\
0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6
\end{bmatrix}
\underset{(*)}{R_5 \Leftrightarrow R_4}
\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\
0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\
0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\
0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\
0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6
\end{bmatrix}
$$

Maka, baris ke-5 dan baris ke-4 pada matriks L juga harus dipertukarkan:

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 & 0 & 0 \\
m_{51} & m_{52} & m_{53} & x & 1 & 0 \\
m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1
\end{bmatrix}
\underset{(*)}{R_5 \Leftrightarrow R_4}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
m_{51} & m_{52} & m_{53} & 1 & 0 & 0 \\
m_{41} & m_{42} & m_{43} & x & 1 & 0 \\
m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1
\end{bmatrix}
$$

4.5.2 Metode Reduksi Crout

Meskipun metode *LU* Gauss dikenal paling baik untuk melakukan dekomposisi *LU*, terdapat metode lain yang digunakan secara luas, yaitu metode reduksi (dekomposisi) Crout (atau **metode reduksi Cholesky** atau **metode *Dolittle***).

Dalam membahas metode reduksi Crout, tinjau matriks 3×3 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{2,2} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Karena $LU = A$, maka hasil perkalian L dan U itu dapat ditulis sebagai

$$LU = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} \\ l_{31}u_{13} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan dua buah matriks $LU = A$, diperoleh

$$u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13} \qquad \} \text{ Baris pertama } U$$

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_1 = a_{21} \;&\rightarrow\; l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31}u_{11} = a_{31} \;&\rightarrow\; l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{aligned}\right\} \text{Kolom pertama } L$$

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} \;&\rightarrow\; u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \;&\rightarrow\; u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \end{aligned}\right\} \text{ Baris kedua } U$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \rightarrow \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} \qquad \} \text{ Kolom kedua } L$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \;\rightarrow\; u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) \quad \} \text{ Baris ketiga } U$$

Kita perhatikan ada urutan pola teratur dalam menemukan elemen-elemen L dan U, yaitu:

- elemen-elemen baris pertama dari U
- elemen-elemen baris pertama dari L
- elemen-elemen baris kedua dari U
- elemen-elemen baris kedua L
- …
- elemen-elemen baris ke-k dari U
- elemen-elemen baris ke-k dari L

Rumus umum menghitung u dan l untuk sistem dengan matriks A yang berukuran 3×3 dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk}\, u_{kj}, \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, 3, \ldots, n \\ j = p, p+1, \ldots, n \end{array} \qquad \text{(P.4.13)}$$

dan

$$l_{iq} = \frac{a_{iq} - \sum_{k=1}^{q-1} l_{ik}\, u_{kq}}{u_{qq}} \quad , \quad \begin{array}{l} q = 1, 2, 3, \ldots, n-1 \\ i = q+1, q+2, \ldots, n \\ \text{dengan syarat } u_{qq} \neq 0 \end{array} \qquad \text{(P.4.14)}$$

Contoh 4.12

Selesaikan

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

dengan metode dekomposisi LU, yang dalam hal ini L dan U dihitung dengan metode reduksi Crout.

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh: $u_{11} = a_{11} = 1$
$u_{12} = a_{12} = 1$
$u_{13} = a_{13} = -1$

$l_{21} = a_{21}/u_{11} = 2/1 = 2$
$l_{31} = a_{31}/u_{11} = -1/1 = -1$

$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - 2 \cdot 1 = 0$

Karena u_{qq} tidak boleh nol, lakukan pertukaran baris, baik untuk matriks A maupun untuk vektor b:

<u>Matriks *A*</u> <u>Vektor *b*</u>

$$R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hitung kembali nilai l_{21}, l_{31}, dan u_{22} (Perhatikan bahwa nilai u_{11}, u_{12}, u_{13} tidak berubah)

$l_{21} = a_{21}/u_{11} = -1/1 = -1$
$l_{31} = a_{31}/u_{11} = 2/1 = 2$

$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - (-1)(1) = 1 + 1 = 2$
$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 - (-1)(-1) = 1 - 1 = 0$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{2 - 2(1)}{2} = 0$$

Diperoleh L dan U sebagai berikut,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \;\text{——}\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1, y_2, dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:
$y_1 = 1$
$-y_1 + y_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2$
$2y_1 + 0y_2 + y_3 = 5 \rightarrow y_3 = 5 - 2y_1 = 3$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$$\begin{array}{lll} 3x_3 & = 3 & \rightarrow x_3 = 1 \\ 2x_2 + 0x_3 & = 2 & \rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 & \rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

Jadi, solusi sistem persamaan lanjar di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$. ■

Jika diamati elemen segitiga bawah pada matriks U semuanya bernilai nol, sehingga ruang yang tidak terpakai itu dapat dipakai untuk menyimpan elemen matriks L. Elemen diagonal matriks L seluruhnya 1, jadi tidak perlu disimpan (*default*). Dengan demikian, penyimpanan elemen L dan U pada satu matriks dapat menghemat penggunaan memori. Selain itu, matriks A hanya dipakai sekali untuk memperoleh L dan U, sesudah itu tidak dipakai lagi. Dengan demikian, setelah L dan U diperoleh, elemennya dapat dipindahkan ke dalam A. Karena alasan ini, maka metode dekomposisi LU dinamakan juga metode kompaksi memori.

4.6 Determinan

Pada pembahasan matriks balikan kita telah menyinggung sedikit mengenai determinan. Menghitung determinan matriks 2×2 sangat mudah dan selalu diajarkan di sekolah menengah. Misalkan A adalah matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka determinan matriks A adalah

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Begitupun menghitung determinan untuk matriks 3×3,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka determinannya dihitung dengan aturan Cramer:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Menghitung determinan untuk matriks $n \times n$ dengan aturan Cramer menjadi tidak praktis lagi. Metode eliminasi Gauss dapat diterapkan untuk menghitung determinan matriks n ´ n. Determinannya dapat dihitung setelah ia ditransformasi menjadi matriks segitiga atas U**.** Pertama-tama kita lihat dulu dua hukum penting determinan [NAK92]:

Hukum 1: $\det(BC) = \det(B) \times \det(C)$

yaitu, determinan dari perkalian dua buah matriks sama dengan perkalian determinan masing-masing matriks.

Hukum 2: $\det(M)$ = hasil kali semua elemen diagonal M jika M adalah matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah.

Jadi, jika semua elemen diagonal matriks adalah satu, maka determinannya sama dengan satu. Dalam menghitung determinan, pertimbangkan dua kasus berikut berikut: (i) bila eliminasi Gauss-nya tanpa *pivoting* dan (ii) bila eliminasi Gauss-nya dengan *pivoting*.

Kasus 1: Bila eliminasi Gauss tidak menerapkan tatancang *pivoting*.

Jika *pivoting* tidak diterapkan, determinan matriks A adalah

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \times \det(U) = \det(U) = u_{11}\, u_{22}\, u_{33} \ldots u_{nn} \qquad \text{(P.4.15)}$$

yang dalam hal ini $\det(L) = 1$ sebab semua elemen diagonal L adalah satu.

Kasus 2: Bila eliminasi Gauss menerapkan tatancang *pivoting*.

Tatancang *pivoting* mengakibatkan pertukaran baris. Dekomposisi LU dengan *pivoting* setara dengan mengerjakan dua proses terpisah berikut:

(1) Transformasikan matriks A menjadi matriks A' dengan cara permutasi baris-baris matriks (sama dengan mengalikan A dengan matriks permutasi P),

$$A' = PA \quad \text{atau setara dengan } A = P^{-1} A' \qquad \text{(P.4.16)}$$

(2) Dekomposisi A' menjadi LU tanpa *pivoting*

$$A' = LU$$

Dari (1) dan (2), L dan U dihubungkan dengan A oleh

$$A = P^{-1} A' = P^{-1} LU \qquad \text{(P.4.17)}$$

Determinan A dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(P^{-1}) \times \det(L) \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times 1 \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times \det(U) \\ &= \alpha \det(U) \end{aligned}$$

yang dalam hal ini $\alpha = \det(P^{-1}) = -1$ atau 1 bergantung pada apakah *pivoting* sejumlah bilangan ganjil atau genap. Jika *pivoting* dilakukan sejumlah p kali, maka a dapat ditulis sebagai:

$$a = (-1)^p$$

a bernilai 1 untuk p genap dan -1 untuk p ganjil. Karena itu,

$$\det(A) = (-1)^p \det(U) = (-1)^p\, u_{11}\, u_{22}\, u_{33} \ldots u_{nn} \qquad \text{(P.4.18)}$$

Contoh 4.13

Hitung determinan matriks A berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - {}^{4}/_{2}\, R_1 \\ R_3 - {}^{-2}/_{2}\, R_1 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \; R_3 - {}^{6}/_{-2}\, R_2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Tidak ada proses *pivoting* selama eliminasi Gauss, maka

det (A) = (2) (-2) (-5) = 20 ■

Contoh 4.14

Hitung determinan matriks berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - {}^{3}/_{1}\, R_1 \\ \sim \\ R_3 - {}^{2}/_{1}\, R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 \Leftrightarrow R_3 \\ (*) \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

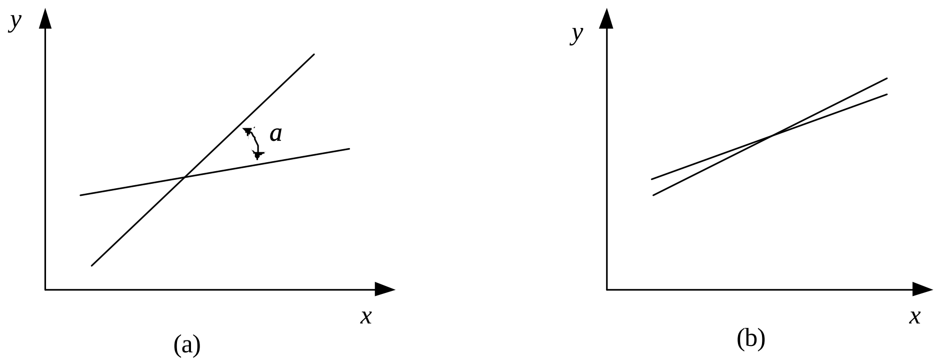
Pivoting diterapkan satu kali (p = 1), sehingga determinan matriks A adalah

det (A) = $(-1)^1$ (1)(4)(-3) = 12 ■

4.7 Kondisi Buruk

Matriks A dikatakan berkondisi buruk (*ill condition*) jika terdapat sebuah vektor kolom b sehingga untuk perubahan kecil A atau b akan menghasilkan perubahan besar pada solusi $x = A^{-1}b$. Sistem $Ax = b$ dikatakan berkondisi buruk bila A berkondisi buruk. Apabila sistem $Ax = b$ berkondisi buruk, hasil perhitungannya mempunyai galat yang besar.

Sebagai contoh, dua persamaan lanjar dengan dua peubah yang tidak diketahui merepresentasikan dua buah garis lurus. Sistem berkondisi buruk jika dan hanya jika sudut a antara kedua garis kecil, yaitu jika dan hanya jika kedua garis hampir sejajar. Perubahan kecil pada koefisien dapat menyebabkan pergeseran yang besar pada titik potong kedua garis (Gambar 4.3) [KRE88]. Untuk sistem persamaan yang lebih besar situasi tersebut pada prinsipnya sama, namun sayangnya tidak ada tafsiran geometrinya.



Gambar 4.3 (a) sistem berkondisi baik dan (b) sistem berkondisi buruk

Sebagai contoh, tinjau sistem persamaan lanjar berikut

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.1x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

yang mempunyai solusi sejati $x_1 = 4$ dan $x_2 = 3$. Jika sekarang $a_{21} = 1.1$ diubah menjadi 1.05,

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.05x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

ternyata solusinya jauh berbeda, yaitu x_1 = 8 dan x_2 = 1. Penambahan sebesar e pada koefisien 1.1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &= 10 \\
(1.1 + e)x_1 + 2x_2 &= 10.4
\end{aligned}
$$

yang mempunyai solusi

$$x_1 = \frac{0.4}{0.1 + e}$$

$$x_2 = \frac{0.6 + 10e}{0.2 + 2e}$$

Solusi ini memperlihatkan bahwa sistem berkondisi buruk sebab perubahan kecil e menghasilkan perubahan besar pada solusi SPL. Pada contoh di atas, e = -0.05, sehingga x_1 = 0.4/(0.1 - 0.05) = 8 dan x_2 = (0.6 - 10 $\times$ 0.05)/(0.2 - 2 $\times$ 0.05) = 1.

Misalkan $\hat{x}$ adalah solusi hampiran dari sistem

$$A\hat{x} = b \qquad \text{(P.4.19)}$$

Terhadap solusi hampiran ini terdapat sisa (residu) sebesar

$$r = b - A\hat{x}$$

Di sini

$$A\hat{x} = b - r \qquad \text{(P.4.20)}$$

Kurangi (P.4.19) dengan (P.4.20):

$$A(\hat{x} - x) = r \qquad \text{(P.4.21)}$$

Orang mungkin berpikir bahwa sisa r yang kecil menandakan bahwa $\hat{x}$ lebih dekat ke x. Tetapi, kesimpulan ini ternyata salah. Penyulihan kembali solusi hampiran ke SPL yang asli tidak dapat memberi petunjuk bahwa sistem berkondisi buruk. Bila x_1 = 8 dan x_2 = 1 disulih kembali ke dalam SPL (i):

$$
\begin{aligned}
&8 + 2(1) = 10 \\
&1.1(8) + 2(1) = 10.8
\end{aligned}
$$

Residunya adalah

$$r = b - A\hat{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 10.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

ternyata sisa r cukup kecil meskipun $x_1 = 8$ dan $x_2 = 1$ bukan jawaban yang benar untuk masalah semula.

Contoh lainnya, tinjau sistem persamaan lanjar $Ax = b$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad b = \begin{bmatrix} -1.61 \\ 7.23 \\ -3.38 \end{bmatrix}$$

Solusi sejatinya adalah $x = (1,2,-1)^T$. Solusi hampirannya, bila dihitung dengan metode eliminasi Gauss, adalah $\hat{x} = (0.880, -2.35, -2.66)^T$. Bila 3.02 pada matriks A diubah menjadi 3.00 diperoleh solusi $\hat{x} = (01.07968, 4.75637, 0.05856)^T$. Kita menyimpulkan bahwa SPL tersebut berkondisi buruk. Jika kita mengalikan A dengan x dengan x adalah solusi sejati $x = (1,2,-1)^T$, kita peroleh

$$Ax = (-1.61, 7.23, -3.38)^T = b$$

tetapi bila kita hitung dengan solusi hampiran $\hat{x} = (0.880, -2.35, -2.66)^T$ kita peroleh

$$A\hat{x} = (-1.6047, 7.2292, -2.66),$$

yang sangar dekat ke b. Penyulihan kembali solusi ke dalam sistem persamaan ternyata tidak dapat dijadikan petunjuk bahwa sistem berkondisi buruk.

Beberapa ukuran untuk kondisi buruk telah dikemukakan para ahli numerik, antara lain $|\det(A)|$ sangat kecil dibandingkan dengan nilai maksimum $|a_{ij}|$ dan $|b_i|$. Misalnya, SPL dengan dua persamaan dapat ditulis sebagai:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \rightarrow x_2 = \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \rightarrow x_2 = \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

Bila gradien kedua garis tersebut *hampir sama*, maka:

$$\frac{-a_{11}}{a_{12}} \approx \frac{-a_{21}}{a_{22}}$$

dan apabila kedua ruas dikali silang:

$$a_{11}a_{22} \approx a_{12}a_{21}$$

atau dapat ditulis sebagai

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \approx 0$$

yang dalam hal ini $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ adalah determinan matriks A pada SPL di atas. Sistem persamaan lanjar berkondisi buruk bila determinan matriks A hampir nol. Jika det(A) = 0, maka gradien kedua garis tersebut sama, yang berarti SPL tidak mempunyai jawab yang unik. Determinan matriks A pada contoh di atas adalah (1)(2) - 2(1.1) = 2 - 2.2 = -0.2, yang relatif lebih dekat ke nol.

Contoh 4.15

Tentukan solusi $Ax = b$ berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1.61 \\ 7.23 \\ -3.38 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Matriks akhir hasil eliminasi Gauss-nya sampai 3 angka bena adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4.33 & 0.56 & -1.78 & 7.23 \\ 0 & -1.44 & 3.77 & -6.65 \\ 0 & 0 & \mathbf{-0.00362} & 0.00962 \end{array}\right]$$

sangat kecil, rawan pembulatan

Solusi hampirannya adalah $x = (0.880, -2.53, -2.66)^T$ bandingkan dengan solusi sejatinya, $x = (1, 2, -1)^T$

Perbedaan kedua solusi ini tidak mengherankan apabila kita hitung determinan matriks A,

$$\det(A) = (4.33)(-1.44)(-0.00362) = -0.0226$$

yang nilainya sangat kecil (mendekati nol), yang berarti sistem berkondisi buruk. Bila koefisien a_{11} diubah dari 3.02 menjadi 3.10 memberikan solusi

$$x = (0.05856, 4.75637, 1.07968)^T$$

Solusi yang lebih baik dapat kita peroleh bila menggunakan bilangan berketelitian yang lebih tinggi, misalnya sampai empat angka bena sebagai berikut: $x_1 = 0.9998$, $x_2 = 1.9995$, $x_3 = -1.002$. ■

Sukar dirinci harus *seberapa dekat* determinan ke nol untuk menunjukkan adanya kondisi buruk. Ini diperumit dengan kenyataan bahwa determinan dapat diubah dengan mengalikan satu atau beberapa persamaan dengan suatu faktor skala tanpa mengubah penyelesaiannya. Akibatnya, determinan merupakan nilai yang nisbi yang dipengaruhi oleh besarnya koefisien [CHA91]. Ini diperlihatkan oleh contoh berikut.

Contoh 4.16

Tentukan determinan matriks A pada SPL berikut

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.1x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

bila

(i) SPL seperti apa adanya,
(ii) kedua persamaan dikali 10.

Penyelesaian:

(i) SPL apa adanya
Determinannya,

$$\det(A) = (1)(2) - (1.1)(2) = -0.2$$

yang dekat ke nol, karena itu SPL berkondisi buruk.

(ii) Kedua persamaan dikali 10,

$$\begin{aligned} 10x_1 + 20x_2 &= 100 \\ 11x_1 + 20x_2 &= 104 \end{aligned}$$

Determinannya,

$$\det(A) = (10)(20) - (11)(20) = -20.$$

yang ternyata menjadi lebih besar. Meskipun determinannya besar, namun SPL tetap berkondisi buruk sebab perkalian dengan skala tidak mempengaruhi penyelesaiannya secara grafis. ■

Contoh 4.16 (ii) di atas memperlihatkan bahwa ukuran determinan sukar dikaitkan dengan kondisi buruk. Kesukaran ini dapat diatasi bila SPL dinormalkan sedemikian sehingga koefisien terbesar pada tiap baris persamaan sama dengan 1.

Contoh 4.17

Normalkan SPL pada Contoh 4.16, lalu hitung determinan matriks *A*.

Penyelesaian:

SPL dinormalkan dengan cara membagi tiap baris dengan koefisien terbesar pada baris itu sehingga koefisien maksimumnya = 1

$$0.5x_1 + x_2 = 5$$
$$0.55x_1 + x_2 = 5.2$$

Determinannya,

$$\det(A) = (0.5)(1) - (1)(0.55) = -0.55$$

yang dekat ke nol, karena itu berkondisi buruk. ■

Pada sistem yang berkondisi baik, penormalan tetap menghasilkan determinan yang jauh dari nol. Hal ini ditunjukkan pada Contoh 4.17 berikut.

Contoh 4.18

Hitung determinan matriks *A* pada SPL

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$

bila (i) SPL apa adanya dan bila (ii) SPL dinormalkan[CHA91]

Penyelesaian:

(i) SPL apa adanya

Determinannya,

$$\det(A) = (3)(2) - 2(-1) = 8$$

yang nilainya jauh dari nol, karena itu berkondisi baik.

(ii) SPL dinormalkan

Penormalan menghasilkan

$$x_1 + 0.667x_2 = 6$$
$$-0.5x_1 + x_2 = 1$$

Determinannya,

$$\det(A) = (1)(1) - (0.667))-0.5) = 1.333$$

yang nilainya jauh dari nol, karena itu berkondisi baik. ■

Selain dengan menghitung determinan, ada beberapa ukuran lain yang dapat digunakan untuk memeriksa apakah sistem persamaan lanjar berkondisi buruk [NAK92]:

1. Mencoba mengubah koefisien dengan perubahan yang cukup kecil, lalu membandingkan solusinya dengan solusi sistem persamaan yang belum diubah. Jika perubahan kecil koefisien menghasilkan solusi yang sangat berbeda dengan solusi sebelum perubahan, maka sistem berkondisi buruk.

2. Membandingkan solusi berketelitian tunggal dengan solusi berketelitian ganda. Jika kedua solusinya berbeda berarti sistem berkondisi buruk.

3. Skalakan A sehingga elemen terbesar dalam masing-masing baris adalah 1 dan kemudian hitung A^{-1}. Jika elemen A^{-1} beberapa orde lebih besar daripada elemen matriks yang diskala semula, maka sistem berkondisi buruk

4. Menghitung $\det(A) \times \det(A^{-1})$ apakah berbeda jauh dari 1. Jika ya, berarti sistem berkondisi buruk.

5. Menghitung $(A^{-1})^{-1}$ apakah berbeda "jauh" dari A. Jika ya, berarti sistem berkondisi buruk.

6. Menghitung AA^{-1} apakah berbeda "jauh" dari matriks I. Jika ya, berarti sistem berkondisi buruk.

7. Menghitung $(A^{-1})(A^{-1})^{-1}$ apakah berbeda "jauh" dari matriks I. Jika ya, berarti sistem berkondisi buruk.

Walaupun terdapat beragam cara untuk memeriksa kondisi sistem, akan lebih disukai mendapatkan bilangan tunggal yang dapat berlaku sebagai petunjuk adanya kondisi buruk. Bilangan tersebut dinamakan **bilangan kondisi matriks**.

4.8 Bilangan Kondisi Matriks

Bilangan kondisi matriks dinyatakan sebagai :

$$Cond(A) = ||A|| \; ||A^{-1}|| \qquad \text{(P.4.22)}$$

yang dalam hal ini $||A||$ adalah norma (*norm*) tak-hingga (∞) matriks A, yang didefinisikan sebagai:

$$||A|| = ||A||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Sebagai tambahan, perlu kita ketahui sifat-sifat norma matriks berikut :

(a) $¦A¦ \ge 0$ dan $¦A¦ = 0$ jika dan hanya jika $A = 0$
(b) $¦kA¦ = k\,¦A¦$
(c) $¦A + B¦ \le ¦A¦ + ¦B¦$
(d) $¦AB¦ \le ¦A¦\,¦B¦$

Contoh 4.19

Hitung bilangan kondisi matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Tentukan terlebih dahulu matriks balikannya,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5.661 & -7.273 & -18.55 \\ 200.5 & -268.3 & -669.9 \\ 76.85 & -102.6 & -255.9 \end{bmatrix}$$

maka dapat dihitung

$\|A\| = |4.33| + |0.56| + |1.78| = 6.07$
$\|A^{-1}\| = |200.5| + |-268.3| + |-669.9| = 1138.7$

sehingga bilangan kondisi matriks A adalah

$cond(A) = (66.7)(1138.7) = 7595$ ■

Bagaimana kita menggunakan bilangan kondisi ini untuk menentukan apakah sistem berkondisi buruk atau berkondisi baik? Ralston dan Rabinowitz (1978) dan Gerald dan Wheatley (1984), memperkenalkan penggunaan bilangan kondisi matriks untuk menjelaskan kasus sistem berkondisi buruk sebagai berikut. Seperti diketahui bahwa kondisi buruk disebabkan oleh kesalahan dalam pengukuran data model atau karena kesalahan pembulatan. Misalkan bahwa kesalahan dalam pengukuran parameter SPL menyebabkan kesalahan pada koefisien $a_{i,j}$, sehingga SPL dipecahkan sebagai $(A + E)\ \hat{x} = b$, yang dalam hal ini $\hat{x}$ menyatakan solusi SPL yang mengandung galat. Misalkan $\hat{A} = A + E$ menyatakan koefisien matriks yang mengandung kesalahan. Kita ingin menghitung berapa besar selisih $x - \hat{x}$.

Dengan menggunakan $Ax = b$ dan $\hat{A}\ \hat{x} = b$, dapat kita tulis :

$$\begin{aligned} x &= A^{-1} b = A^{-1} (Ax) = A^{-1} (A + \hat{A} - A)\ \hat{x} \\ &= [\ I + A^{-1} (\hat{A} - A)\ ]\ \hat{x} \\ &= \hat{x} + A^{-1} (\hat{A} - A)\ \hat{x} \end{aligned}$$

Karena $\hat{A} - A = E$, maka

$$x - \hat{x} = A^{-1} E\, \hat{x}\, x \qquad \text{(P.4.23)}$$

Dengan menggunakan norma, kita peroleh :

$$\|x - \hat{x}\| \le \|A^{-1}\|\,\|E\|\ \|x\| = \|A^{-1}\|\,\|A\|\,\frac{\|E\|}{\|A\|}\,\|\hat{x}\|$$

sehingga

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|\hat{x}\|} \le \text{(bilangan kondisi)} \times \frac{\|E\|}{\|A\|} \qquad \text{(P.4.24)}$$

Persamaan (P.4.24) ini menyatakan bahwa norma galat relatif solusi SPL dapat sebesar norma galat nisbi koefisien matriks *A* dikali dengan bilangan kondisi. *Jadi, jika bilangan kondisi matriks A besar, maka galat relatif solusi SPL juga akan besar. Sebaliknya, jika bilangan kondisinya kecil, galat relatif solusi SPL juga kecil.* Misalnya jika koefisien *A* diketahui teliti sampai *t* angka bena (yakni, galat pembulatan berorde 10^{-t}) dan bilangan kondisi $A = 10^c$, penyelesaian *x* akan teliti sampai $t - c$ angka bena (galat pembulatan $\cong 10^{c-t}$). Misalnya, jika koefisien *A* diketahui hanya 4 angka bena dan bilangan kondisi 1000, vektor *x* hanya mempunyai ketelitian satu angka signifikan

TEOREMA 4.1. Sistem persamaan lanjar $Ax = b$ yang bilangan kondisinya kecil menyatakan sistem berkondisi baik. Bilangan kondisi besar menandakan bahwa sistem berkondisi buruk. [KRE88].

Sistem pada Contoh 4.19 adalah contoh sistem yang berkondisi buruk, karena bilangan kondisinya besar.

Dalam praktek, A^{-1} tidak diketahui, sehingga untuk menghitung bilangan kondisi matriks *A* kita harus menaksir $\lVert A^{-1} \rVert$. Metode untuk penaksiran ini tidak dijelaskan di sini.

Di dalam banyak literatur disebutkan bahwa matriks Hilbert adalah contoh matriks yang berkondisi buruk. Bentuk umum matriks Hilbert orde *n* adalah

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

Contohnya, untuk $n = 3$ matriks Hilbertnya adalah

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Norma matriks H adalah

$$\|H\|_{\sim} = |\ 1\ | + |\ ½\ | + |\ {}^{1}/_{3}\ | = {}^{11}/_{6}$$

Matriks balikannya adalah,

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & 10 \\ -36 & 96 & -60 \\ 30 & -90 & 60 \end{bmatrix}$$

Elemen matriks H^{-1} jauh lebih besar daripada matriks H, hal ini menandakan bahwa matriks H berkondisi buruk. Dapat dihitung norma matriks H^{-1}

$$\|H^{-1}\|_{\sim} = |36| + |96| + |60| = 192$$

Sehingga bilangan kondisi matriks H adalah

$$cond(H) = \|H\|_{\sim} \|H^{-1}\|_{\sim} = {}^{11}/_{6} \times 192 = 352$$

yang nilanya sangat besar, sehingga benarlah bahwa matriks H berkondisi buruk.

Sekarang kita buktikan mengapa penyulihan kembali solusi ke dalam SPL tidak dapat dijadikan petunjuk bahwa sistem berkondisi buruk. Tinjau kembali persamaan residu

$$r = b - A\hat{x}\ . \qquad \text{(P.4.25)}$$

Pada sistem yang berkondisi buruk nilai r sangat kecil, sehingga kita dapat terkecoh dengan menganggap sistem berkondisi baik. Contoh-contoh sebelum ini memperlihatkan bahwa r bukanlah ukuran yang bagus untuk galat ($e = x - \hat{x}$) pada sistem yang berkondisi buruk. Bila x adalah solusi eksak maka $r = 0$, atau

$$0 = b - Ax \qquad \text{(P.4.26)}$$

Kurangi (P.4.25) dengan (P.4.26):

$$(b - A\hat{x}) - (b - Ax) = r \quad \Leftrightarrow$$
$$-A\hat{x} + Ax = r \quad \Leftrightarrow$$
$$A(x - \hat{x}) = r \quad \Leftrightarrow$$
$$A\,e = r \tag{P.4.27}$$

atau

$$e = A^{-1}\, r \tag{P.4.28}$$

Pada sistem yang berkondisi buruk, elemen matriks A^{-1} relatif besar dibandingkan elemen-elemen A. Dari (P.4.28) terlihat bahwa bila elemen A^{-1} relatif sangat besar dibandingkan nilai r yang kecil, maka e akan besar. Jadi, residu r yang kecil tidak menjamin solusi yang diperoleh adalah benar. Karena itu digunakan hubungan antara nilai mutlak galat solusi dengan nilai mutlak residu.
Dari persamaan (P.4.25) kita peroleh :

$$r = b - A\hat{x} = Ax - A\hat{x} = A(x - \hat{x}) = Ae \tag{P.4.29}$$

Disini,

$$e = A^{-1}\, r \tag{P.4.30}$$

Dari sifat-sifat norma matriks di atas, maka norma untuk persamaan (P.5.27) , dengan menerapkan sifat (d), dapat kita tulis :

$$\|e\| \le \|A^{-1}\|\,\|r\| \tag{P.4.31}$$

Dari $r = Ae$, kita juga punya $\|r\| \le \|A\|\,\|e\|$, yang bila digabung dengan persamaan (P.5.32) memberikan

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \le \|e\| \le \|A^{-1}\|\,\|r\| \tag{P.4.32}$$

Dengan menggunakan cara yang sama untuk $Ax = b$ dan $x = A^{-1}\, b$, kita peroleh

$$\frac{\|b\|}{\|A\|} \le \|x\| \le \|A^{-1}\|\,\|b\| \tag{P.4.33}$$

Dari persamaan (P.4.32) dan (P.4.33) kita dapatkan hubungan yang penting :

$$\frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} \qquad \text{(P.4.34)}$$

atau

$$\frac{1}{\text{bil. kondisi}} \quad \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq (\text{bil. kondisi}) \; \frac{\|r\|}{\|b\|} \qquad \text{(P.4.35)}$$

Persamaan (P.4.35) memperlihatkan bahwa galat relatif dalam menghitung solusi *x* dapat sebesar residu relatif dikali dengan bilangan kondisi. Tentu saja juga akan sekecil residu relatif dibagi dengan bilangan kondisi. Karena itu, jika bilangan kondisi besar, residu *r* hanya memberikan sedikit informasi tentang ketelitian *x*. Sebaliknya, jika bilangan kondisi dekat ke 1, residu nisbi memberikan ukuran galat nibi *x* yang bagus.

Rice pada tahun 1983 menyarankan sebuah cara lain untuk menilai kondisi SPL: jalankan pemecahan SPL yang sama pada dua kompiler yang berbeda (atau pada dua mesin yang berbeda). Karena kode yang dihasilkan kemungkinan besar menerapkan perhitungannnya secara berbeda. Kondisi buruk akan jelas terlihat dari eksperimen seperti itu [CHA91].

4.9 Metode Lelaran Untuk Menyelesaikan SPL

Metode eliminasi Gauss melibatkan banyak galat pembulatan. Galat pembulatan yang terjadi pada eliminasi Gauss (maupun eliminasi Gauss-Jordan) dapat menyebabkan solusi yang diperoleh "jauh" dari solusi sebenarnya. Gagasan metoda lelaran pada pencarian akar persamaan nirlanjar dapat juga diterapkan untuk menyelesaikan SPL. Dengan metode lelaran, galat pembulatan dapat diperkecil, karena kita dapat meneruskan lelaran sampai solusinya seteliti mungkin, sesuai dengan batas galat yang kita perbolehkan. Dengan kata lain, besar galat dapat dikendalikan sampai batas yang bisa diterima.

Jika metode eliminasi Gauss dan variasi-variasinya serta metode dekomposisi *LU* dinamakan **metode langsung** (*direct*) -karena solusi SPL diperoleh tanpa lelaran- maka metode lelaran dinamakan **metode tidak langsung** (*indirect*) atau **metode iteratif**.

Tinjau kembali sistem persamaan lanjar

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Dengan syarat $a_{kk} \neq 0$, $k = 1, 2, ..., n$, maka persamaan lelarannya dapat ditulis sebagai

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{k} .... - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - ....a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}} \qquad \text{(P.4.36)}$$

dengan $k = 0, 1, 2, \ldots$

Lelaran dimulai dengan memberikan tebakan awal untuk x**,**

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

Sebagai kondisi berhenti lelarannya, dapat digunakan pendekatan galat relatif

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| < e \qquad \text{untuk } \underline{\text{semua}}\ i = 1, 2, 3, …., n$$

Syarat cukup agar lelarannya konvergen adalah sistem **dominan secara diagonal***:*

$$| a_{ii} | > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left| a_{ij} \right| \qquad , i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Syarat cukup ini berarti bahwa agar lelarannya konvergen, cukup dipenuhi syarat itu. Jika syarat tersebut dipenuhi, kekonvergenan dijamin. Meskipun sistem tidak dominan secara diagonal, lelarannya masih mungkin konvergen (lihat kembali makna syarat cukup pada upabab 3.3). Kekonvergenan juga ditentukan oleh pemilihan tebakan awal. Tebakan awal yang terlalu jauh dari solusi sejatinya dapat menyebabkan lelaran divergen.

Sebagai contoh, SPL berikut

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 5 \end{aligned}$$

dominan secara diagonal, karena

$$| 3 | > | 1 | + | -1 |$$

$$| 4 | > | 2 | + | 1 |$$

$$| 8 | > | -1 | + | 5 |$$

karena itu lelarannya pasti konvergen.

Ada dua metode lelaran yang akan kita bahas di sini:

1. Metode lelaran Jacobi
2. Metode lelaran Gauss-Seidel

4.9.1 Metode Lelaran Jacobi

Persamaan lelarannya adalah seperti yang ditulis di atas. Misalkan diberikan tebakan awal $x^{(0)}$:

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T$$

Prosedur lelaran untuk lelaran pertama, kedua, dan seterusnya adalah sebagai berikut:

Lelaran pertama:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - .... - a_{1n}x_n^{(0)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} - .... - a_{2n}x_n^{(0)}}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - a_{n2}x_2^{(0)} - .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}}{a_{nn}}$$

Lelaran kedua:

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - .... - a_{1n}x_n^{(1)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(1)} - .... - a_{2n}x_n^{(1)}}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(2)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - a_{n2}x_2^{(1)} - .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(1)}}{a_{nn}}$$

Rumus umum :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2,.... \qquad \text{(P.4.37)}$$

4.9.2 Metode Lelaran Gauss-Seidel

Kecepatan konvergen pada lelaran Jacobi dapat dipercepat bila setiap harga x_i yang baru dihasilkan segera dipakai pada persamaan berikutnya untuk menentukan harga x_{i+1} yang lainnya.

Lelaran pertama:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - a_{14}x_4^{(0)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_1 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)} - a_{24}x_4^{(0)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)} - a_{34}x_4^{(0)}}{a_{33}}$$

$$x_4^{(1)} = \frac{b_4 - a_{41}x_1^{(1)} - a_{42}x_2^{(1)} - a_{43}x_3^{(1)}}{a_{44}}$$

Lelaran kedua:

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - a_{14}x_4^{(1)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_1 - a_{21}x_1^{(2)} - a_{23}x_3^{(1)} - a_{24}x_4^{(1)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(2)} - a_{32}x_2^{(2)} - a_{34}x_4^{(1)}}{a_{33}}$$

$$x_4^{(2)} = \frac{b_4 - a_{41}x_1^{(2)} - a_{42}x_2^{(2)} - a_{43}x_3^{(2)}}{a_{44}}$$

Rumus umum:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2,\ldots.$$

Program 4.5 Metode Lelaran Gauss-Seidel (tanpa penanganan kasus divergen)

```
procedure Gauss_Seidel(A : matriks; b: vektor; n:integer;
                       var x : vektor);
{Menghitung solusi SPL Ax = b dengan metode Gauss-Seidel. Diandaikan
 lelaran selalu konvergen
 K.Awal : A dan b sudah terdefinisi harganya; x sudah berisi vektor
          tebakan awal
  K.Akhir: x berisi solusi SPL.
}
const
   epsilon = 0.000001;
var
    i, j : integer;
    konvergen : boolean;
    sigma1, sigma2 : real;
    xlama : vektor;
begin

    repeat
         for i:=1 to n do
          begin
             xlama[i]:=x[i];   {simpan nilai x[i] sebelumnya}
             sigma1:=0;
             for j:=1 to i-1 do
                sigma1:=sigma1 + a[i,j]*x[j];
            {endfor}
             sigma2:=0;
             for j:=i+1 to n do
                sigma2:=sigma2 + a[i,j]*x[j];
            {endfor}
            x[i]:= (b[i] - sigma1 - sigma2)/a[i,i];  {a[i,i] <> 0}
          end;
          {periksa kekonvergenan}
           konvergen:=true; i:=1;
           while (konvergen) and (i<=n) do
             begin
                {bila salah satu dari x[i], i=1, 2, ..., n tidak memenuhi
                      ABS(xlama[i] - x[i]) < epsilon
                 berarti lelaran belum konvergen}
                 if ABS(xlama[i] - x[i]) > epsilon then
                    konvergen:=false;  {belum konvergen}
                 {end if}
                 i:=i+1;
             end;
            { konvergen  or i > n }
     until konvergen;
  end;
```

Contoh 4.20

[MAT92] Tentukan solusi SPL

$$
\begin{aligned}
&4x - y + z = 7 \\
&4x - 8y + z = -21 \\
&-2x + y + 5z = 15
\end{aligned}
$$

dengan nilai awal $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 2)$.
(Solusi sejatinya adalah (2, 4, 3))

Penyelesaian:

(a) Metode lelaran Jacobi
Persamaan lelarannya:

$$x_{r+1} = \frac{7 + y_r - z_r}{4}$$

$$y_{r+1} = \frac{21 + 4x_r - z_r}{8}$$

$$z_{r+1} = \frac{15 + 2x_r - y_r}{5}$$

Lelarannya:

$$x_1 = \frac{7 + 2 - 2}{4} = 1.75$$

$$y_1 = \frac{21 + 4(1) + 2}{8} = 3.375$$

$$z_1 = \frac{15 + 2(1) - 2}{5} = 3.000$$

$$x_2 = \frac{7 + 3.375 - 3.00}{4} = 1.84375$$

$$y_2 = \frac{21 + 4(3.375) - 3.00}{8} = 3.875$$

$$z_2 = \frac{15 + 2(1.75) - 3.375}{5} = 3.025$$

...

$x_{19} = 2.00000000$
$y_{19} = 4.00000000$
$z_{19} = 3.00000000$

(b) Metode lelaran Gauss-Seidel
Persamaan lelarannya,

$$x_{r+1} = \frac{7 + y_r - z_r}{4}$$

$$y_{r+1} = \frac{21 + 4x_r - z_r}{8}$$

$$z_{r+1} = \frac{15 + 2x_r - y_r}{5}$$

Lelarannya,

$$x_1 = \frac{7 + 2 - 2}{4} \quad = 1.75$$

$$y_1 = \frac{21 + 4(1.75) + 2}{8} \quad = 3.75$$

$$z_1 = \frac{15 + 2(1.75) - 3.75}{5} \quad = 3.000$$

$$x_2 = \frac{7 + 3.75 - 2.95}{4} \quad = 1.95$$

$$y_2 = \frac{7 + 3.75 - 2.95}{8} \quad = 3.96875$$

$$z_2 = \frac{15 + 2(1.95) - 3.968375}{5} \quad = 2.98625$$

...

$x_{10} = 2.00000000$
$y_{10} = 4.00000000$
$z_{10} = 3.00000000$

Jadi, solusi SPL adalah x = 2.00000000, y = 4.00000000, z = 3.00000000 ■

4.10 Contoh Soal Terapan

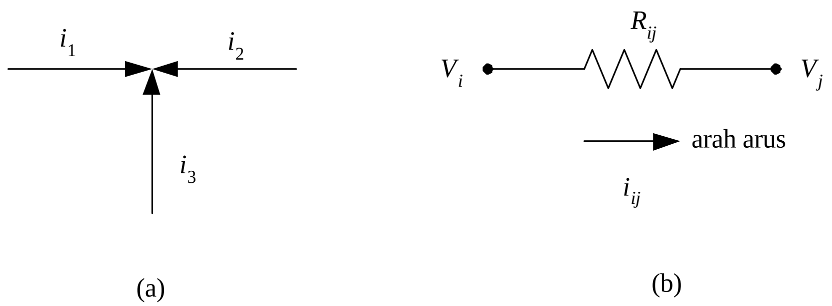
Dalam sebuah rangkaian listrik berlaku hukum-hukum arus Kirchoff menyatakan bahwa jumlah aljabar dari semua arus yang memasuki suatu simpul (Gambar 4.4a) haruslah nol:

$$\Sigma\, i = 0 \qquad \text{(P.4.38)}$$

Dalam hal ini, semua arus i yang memasuki simpul dianggap bertanda positif. Sedangkan hukum Ohm (Gambar 4.4b) menyatakan bahwa arus i yang melalui suatu tahanan adalah :

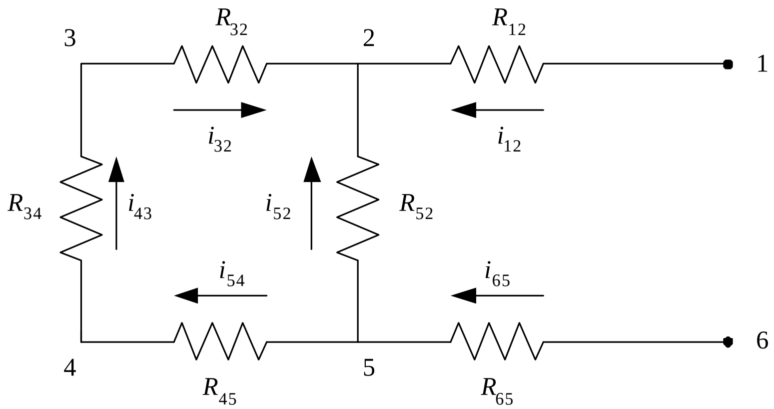
$$i_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}} \qquad \text{(P.4.39)}$$

yang dalam hal ini V adalah tegangan dan R adalah tahanan.



Gambar 4.4 (a) Hukum Kirchoff, (b) hukum Ohm

Diberikan sebuah rangkaian listrik dengan 6 buah tahanan seperti pada Gambar 4.5 [CHA91]. Anda diminta menghitung arus pada masing-masing rangkaian.



Gambar 4.5 Rangkaian listrik dengan 6 buah tahanan

Arah arus dimisalkan seperti diatas. Dengan hukum Kirchoff diperoleh persamaan-persamaan berikut :

$$\begin{array}{llll}
i_{12} & + i_{52} & + i_{32} & = 0 \\
i_{65} & - i_{52} & - i_{54} & = 0 \\
i_{43} & - i_{32} & & = 0 \\
i_{54} & - i_{43} & & = 0
\end{array}$$

Dari hukum Ohm didapat :

$$\begin{array}{llll}
i_{32} R_{32} & - V_3 & + V_2 & = 0 \\
i_{43} R_{43} & - V_4 & + V_3 & = 0 \\
i_{65} R_{65} & & + V_5 & = 0 \\
i_{12} R_{12} & & + V_2 & = 0 \\
i_{54} R_{54} & - V_5 & + V_4 & = 0 \\
i_{52} R_{52} & - V_5 & + V_2 & = 0
\end{array}$$

Dengan menyusun kesepuluh persamaan diatas didapatkan SPL sbb :

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} i_{12} & i_{52} & i_{32} & i_{65} & i_{54} & i_{43} & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & R_{32} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{43} & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & R_{65} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
R_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & R_{54} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & R_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_6 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan

$$i_{12}\,,\quad i_{52}\,,\quad i_{32}\,,\quad i_{65}\,,\quad i_{54}\,,\quad i_{13}\,,\quad V_2\,,\quad V_3\,,\quad V_4\,,\quad V_5$$

bila diketahui

R_{12} = 5 ohm , R_{52} = 10 ohm , R_{32} = 10 ohm
R_{65} = 20 ohm , R_{54} = 15 ohm , R_{14} = 5 ohm.
V_1 = 200 volt , V_6 = 0 volt.

Penyelesaian:

Persoalan ini diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss. Matriks awal sebelum proses eliminasi Gauss adalah:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
1.000 & 1.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & -1.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 10.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 5.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 20.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 \\
5.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 200.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 15.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 \\
0.000 & 10.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000
\end{array}\right]$$

Matriks akhir setelah eliminasi adalah:

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
1.000 & 1.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & -1.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.100 & 0.000 & 0.000 & -0.100 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & -1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.200 & -0.200 & 0.000 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.100 & -0.200 & 0.200 & 0.150 & 0.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.600 & 0.600 & 0.350 & 40.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.100 & 0.025 & 20.000 \\
0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.200 & -26.667
\end{array}\right]$$

Dengan teknik penyulihan mundur diperoleh solusinya sebagi berikut:

$i12$ = 4.444 ampere, $i52$ = -4.444 ampere
$i32$ = 0.000 ampere, $i65$ = -6.667 ampere
$i54$ = -2.222 ampere, $i43$ = -2.222 ampere
$V2$ = 177.778 volt, $V3$ = 177.778 volt
$V4$ = 166.667 volt, $V5$ = 133.333 volt

Simplex veri sigillum
Kesederhanaan adalah tanda kebenaran
(Peribahasa Latin)

Kebenaran yang paling agung adalah yang paling sederhana.
Begitu pula orang yang paling agung
(Campbell)

Soal Latihan

1. Pecahkan SPL berikut ini:

$$
\begin{aligned}
2.51x_1 + 1.48x_2 + 4.53x_3 &= 0.05 \\
1.48x_1 + 0.93x_2 - 1.30x_3 &= 1.03 \\
2.68x_1 + 3.04x_2 - 1.48x_3 &= -0.53
\end{aligned}
$$

   dengan metode:

   (a) eliminasi Gauss naif (manual, 3 angka bena)
   (b) eliminasi Gauss yang diperbaiki dengan tataancang *pivoting* (manual, 3 angka bena)
   (c) eliminasi Gauss yang diperbaiki dengan tataancang *pivoting* (komputer, jumlah angka bena sesuai dengan komputer yang digunakan).

   Sulihkan jawaban maisng-masing (a), (b), dan (c) ke dalam SPL, lalu bandingkan hasilnya dengan ruas kanan (vektor *b*)

2. Diberikan sistem persamaan lanjar $Ax = b$ dengan A dan b sebagai berikut :

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

   (a) Tentukan solusinya dengan metode eliminasi Gauss
   (b) Tentukan determinan matriks **A**
   (c) Tentukan solusinya dengan metode eliminasi Gauss-Jordan
   (d) Tentukan solusinya dengan metode matriks balikan
   (e) Tentukan solusinya dengan metode dekomposisi LU
   (f) Tentukan solusinya dengan metode lelaran Gauss-Seidell
   (g) Tentukan solusinya dengan metode lelaran Jacobi

   Terapkan strategi *pivoting* untuk (a), (b), (c), (d), dan (e).

3. *Pivoting* lengkap jarang diterapkan orang karena kerumitannya. Dari praktek ditemukan bahwa *pivoting* lengkap memberikan hasil yang lebih teliti daripada *pivoting* sebagian meskipun ketelitian ini dibayar dengan waktu komputasi tambahan. Tunjukkan kebenaran pernyataan ini dengan memecahkan SPL berikut :

$$
\begin{aligned}
0.002110x + 0.08204y &= 0.04313 \\
0.3370x + 12.84y &= 6.757
\end{aligned}
$$

(a) tanpa *pivoting* (eliminasi Gauss naif)
(b) dengan *pivoting* sebagian
(c) dengan *pivoting* lengkap

Semua perhitungan menggunakan empat angka bena (manual).

4. Pecahkan sistem persamaan lanjar $Ax = b$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

dan b adalah $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, dan $(0,0,1)^T$. Metode yang digunakan:

(a) metode eliminasi Gauss yang diperbaiki (sekali jalan).
(b) metode eliminasi Gauss-Jordan dengan tataancang *pivoting (*sekali jalan)
(c) metode matriks balikan
(d) metode dekomposisi LU

Gunakan komputer dan ketelitian hasil semaksimal mungkin (bilangan berketelitian ganda). Hitung juga determinan matriks A.

5. Sekumpulan sistem persamaan linier $Ax = b$ mempunyai matriks A yang sama tetapi vektor b berbeda-beda. Matriks A nya adalah matriks A yang didefinisikan pada soal nomor 2, sedangkan vektor b adalah sbb:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(a) selesaikan dengan metode dekomposisi LU
(b) dengan metode eliminasi Gauss-Jordan, yang dalam hal ini matriks A digabung (*augmented*) dengan semua vektor b.

6. Diberikan SPL $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 100 & 3000 \\ 50 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2000 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan solusinya sampai 4 angka bena dengan :

(a) metode eliminasi Gauss tanpa penskalaan
(b) metode eliminasi Gauss dengan penskalaan

Dengan penskalaan, bagilah setiap baris i dengan maks $|a_{ij}|$, j = 1, 2, 3, .., n. Periksa solusi anda dengan penyulihan kembali kedalam SPL semula.

7. Pada persoalan m persamaan dengan n variabel $(m < n)$, tentukan solusi umum dari $Ax = b$, yang dalam hal ini:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

8. Pecahkan sistem persamaan lanjar berikut dengan metode eliminasi Gauss :

(i) $6.122x + 1500.5y = 1506.622$
$2000x + 3y = 2003$

(ii) $1.001x + 1.5y = 0$
$2x + 3y = 1$

(a) Tanpa *pivoting* (naif);
(b) dengan *pivoting*.
(c) Cek jawaban anda dengan menyulihkan solusi kedalam SPL semula. Lihat
(d) bedanya dengan nilai ruas kanan.

Untuk sistem (i) gunakan enam angka bena, dan untuk (ii) gunakan empat angka bena. Ingatlah bahwa setiap komputasi harus dibulatkan ke jumlah angka bena yang diminta (tidak hanya pada hasil akhir saja).

9. Matriks Hilbert adalah contoh klasik matriks yang berkondisi buruk. Misalkan A adalah matriks Hilbert dan diberikan SPL $Ax = b$:

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\, x_2 + 1/3\, x_3 + 1/4\, x_4 &= 1 \\ 1/2\, x_1 + 1/3\, x_2 + 1/4\, x_3 + 1/5\, x_4 &= 0 \\ 1/3\, x_1 + 1/4\, x_2 + 1/5\, x_3 + 1/6\, x_4 &= 0 \\ 1/4\, x_1 + 1/5\, x_2 + 1/6\, x_3 + 1/7\, x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Pecahkan $Ax = b$ dengan metode eliminasi Gauss naif dengan ketentuan:

(a) semua bilangan dalam bentuk pecahan, sehingga tidak ada galat akibat pembulatan. Solusinya eksak, misalkan dilambangkan dengan x. Hitung Ax, dan bandingkan hasilnya dengan b.

(b) semua bilangan dalam tiga angka bena (manual, tanpa komputer). Solusinya hampiran, misalkan dilambangkan dengan $\hat{x}$. Hitung $A\hat{x}$, dan bandingkan hasilnya dengan b. Hitung $e = x - \hat{x}$

(c) semua bilangan berketelitian tinggi (pakai komputer). Solusinya hampiran, misalkan dilambangkan dengan $\hat{x}$. Hitung $A\hat{x}$, dan bandingkan hasilnya dengan b. Hitung $e = x - \hat{x}$.

10. (a) Dari soal nomor 4 di atas, tentukan determinan matriks A untuk masing-masing ketentuan (a), (b), (c). Apa kesimpulan anda?

    (b) Normalkan matriks A, lalu hitung bilangan kondisi matriks A (gunakan komputer). Apa kesimpulan anda?

11. Pecahkan sistem persamaan lanjar

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_3 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

dengan metode:

(a) dekomposisi LU, yang dalam hal ini L dan U dihitung dengan (i) metode LU Gauss (tidak naif) dan (ii) metode reduksi Crout

(b) lelaran Jacobi ($e = 10^{-10}$). Tebakan awal sembarang.

(c) lelaran Gauss-Seidell ($e = 10^{-10}$). Tebakan awal sembarang

Gunakan komputer (ketelitian hasil semaksimal mungkin). Untuk (b) dan (c), apakah matriks A dominan secara diagonal?

12. Dapatkah sistem persamaan lanjar berikut :

(a) $5x + 3y = 6$
$4x - 2y = 8$

(b) $5x + 3y = 6$
$-6x - 8y = -4$

(c) $2x + y - 5z = 9$
$x - 5y - z = 14$
$7x - y - 3z = 26$

diselesaikan dengan metode iterasi Jacobi dan iterasi Gauss-Seidell ? Mengapa ?

13. Matriks Hilbert adalah contoh klasik matriks berkondisi buruk. Diberikan matriks Hilbert berukuran 4×4 :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

Periksa kondisinya dengan :

(a) Hitung HH^{-1} apakah berbeda dari matriks identitas
(b) Hitung $(H^{-1})^{-1}$ apakah berbeda dari matriks H
(c) Hitung $H^{-1}(H^{-1})^{-1}$ apakah berbeda dari matriks identitas I dan apakah berbeda dari jawaban (a)
(d) Hitung bilangan kondisinya apakah sangat besar dibandingkan dengan (Normalkan terlebih dahulu matriks H)

14. Seperti nomor 13, tetapi matriksnya adalah matriks A pada soal nomor 1.