Bab 1

Metode Numerik Secara Umum

Pengetahuan dimulai dari rasa ingin tahu, kepastian dimulai dengan rasa ragu-ragu, dan filsafat dimulai dengan kedua-duanya.
(Jujun S. Suriasumantri)

Rasa ingin tahu adalah ibu dari semua ilmu pengetahuan
(Anonim)

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang fisika, kimia, ekonomi, atau pada persoalan rekayasa (*engineering*), seperti Teknik Sipil, Teknik Mesin, Elektro, dan sebagainya. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak ideal alias rumit. Model matematika yang rumit ini adakalanya tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan **solusi sejatinya (*exact solution*)**. Yang dimaksud dengan metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku (lazim).

Sebagai contoh ilustrasi, tinjau sekumpulan persoalan matematik di bawah ini. Bagaimana cara anda menyelesaikannya?

(i) Tentukan akar-akar persamaan polinom:

$$23.4x^7 - 1.25x^6 + 120x^4 + 15x^3 - 120x^2 - x + 100 = 0$$

(ii) Tentukan harga x yang memenuhi persamaan:

$$\sqrt{27.8e^{5x} - \frac{1}{x}} = \cos^{-1}\frac{(120x^2 + \sqrt{2x})}{17x - 65}$$

(iii) Selesaikan sistem persamaaan lanjar (*linear*):

$$
\begin{aligned}
1.2a - 3b - 12c + 12d + 4.8e - 5.5f + 100g &= 18 \\
0.9a + 3b - c + 16d + 8e - 5f - 10g &= 17 \\
4.6a + 3b - 6c - 2d + 4e + 6.5f - 13g &= 19 \\
3.7a - 3b + 8c - 7d + 14e + 8.4f + 16g &= 6 \\
2.2a + 3b + 17c + 6d + 12e - 7.5f + 18g &= 9 \\
5.9a + 3b + 11c + 9d - 5e - 25f - 10g &= 0 \\
1.6a + 3b + 1.8c + 12d - 7e + 2.5f + g &= -5
\end{aligned}
$$

(iv) Tentukan nilai maksimum fungsi tiga matra (*dimension*):

$$f(x,y) = \cos\frac{x - \sqrt{\sin(x)} + 3}{4 + (xy)^2} + \sin(3xy - 1) - \tan\left(\frac{x(0.08 + \cos(x))}{y}\right)$$

(v) Bila diperoleh tabulasi titik-titik (x,y) sebagai berikut (yang dalam hal ini rumus fungsi $y = f(x)$ tidak diketahui secara eksplisit):

x	$y = f(x)$
2.5	1.4256
3.0	1.7652
3.5	2.0005
4.4	2.8976
6.8	3.8765

Hitung taksiran nilai y untuk x = 3.8!

(vi) Berdasarkan titik-titik data pada tabel persoalan (v) di atas, berapa nilai $f'(3.5)$ dan nilai $f''(3.5)$?

(vii) Hitung nilai integral-tentu berikut:

$$\int_{1.2}^{2.5} \left(\sqrt{\left(45.3e^{7x} + \frac{100}{x}\right)^4} + \frac{4}{(x^2+1)}\right)dx$$

(viii) Diberikan persamaan differensial biasa (PDB) dengan nilai awal:

$$150y'' + 2y't = \frac{\sqrt{\ln(21t+40)y}}{t^2} + 120 \quad ; y'(0) = 0,\ y(0) = 1.2$$

Hitung nilai y pada t = 1.8!

Menghadapi soal-soal seperti di atas, anda mungkin menyerah, atau mungkin mengatakan bahwa soal-soal tersebut tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang biasa anda kenal. Soal (i) misalnya, biasanya untuk polinom derajat 2 orang masih dapat mencari akar-akar polinom dengan rumus *abc* yang terkenal itu yaitu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(P.1.1)}$$

namun, untuk polinom derajat > 2, seperti pada soal (i), tidak terdapat rumus aljabar untuk menghitung akar polinom. Yang mungkin kita lakukan adalah dengan memanipulasi polinom, misalnya dengan memfaktorkan (atau menguraikan) polinom tersebut menjadi perkalian beberapa suku. Semakin tinggi derajat polinom, jelas semakin sukar memfaktorkannya. Ada juga beberapa alternatif lain. Yang pertama dengan cara coba-coba seperti **metode pembagian sintetis Horner**. Dengan metode ini, polinom dibagi dengan sebuah bilangan. Jika sisa pembagiannya nol, maka bilangan tersebut adalah akar polinom. Cara kedua adalah secara grafik, yaitu dengan merajah kurva fungsi di atas kertas grafik, kemudian berdasarkan gambar kurva, kita mengambil tarikan akar secara kasar, yaitu titik poyong kurva dengan sumbu-*x*. Cara ini, selain kaku dan tidak praktis, ketelitian akar yang diperoleh sangat bergantung pada ketelitian penggambaran kurva.. Lagipula, merajah kurva pada kertas grafik hanya terbatas pada fungsi yang dapat digambarkan pada bidang dua matra atau tiga matra. Untuk fungsi dengan peubah lebih besar dari 3 jelas tidak dapat (malah tidak mungkin) kita gambar kurvanya. Soal nomor (ii) masih sejenis dengan soal (i), yaitu menentukan nilai *x* yang memenuhi kedua persamaan.

Untuk soal nomor (iii), juga tidak ada rumus yang baku untuk menemukan solusi sistem persamaan lanjar. Apabila sistem persamaannya hanya berupa dua garis lurus dengan dua peubah, kita masih dapat menemukan solusinya (dalam hal ini titik potong kedua garis) dengan menggunakan rumus titik potong dua buah garis atau dengan aturan Cramer. Kita juga dapat menemukan titik potong tersebut dengan menggambar kedua garis pada kertas grafik. Untuk sistem yang terdiri dari tiga buah persamaan lanjar dengan tiga peubah, aturan Cramer masih dapat digunakan untuk memecahkan sistem. Tetapi untuk sistem dengan jumlah persamaan dan jumlah peubah lebih besar dari tiga, tidak ada rumus yang dapat dipakai untuk memecahkannya.

Pada soal nomor (iv), relatif sukar mencari titik optimum fungsi yang memiliki banyak peubah. Untuk menentukan titik optimum (titik ekstrim fungsi), pertama-tama orang harus menentukan turunan fungsi, menjadikan ruas kanannya sama dengan nol, lalu memeriksa jenis titik ekstrimnya. Bila fungsinya cukup rumit dan disusun oleh banyak peubah, menghitung turunan fungsi menjadi pekerjaan yang sukar atau bahkan tidak mungkin dilakukan.

Pertanyaan yang agak klasik sering muncul pada soal nomor (v): bagaimana menghitung nilai sebuah fungsi bila rumus fungsinya sendiri tidak diketahui? Kita semua tahu bahwa nilai fungsi diperoleh dengan cara menyulihkan (*substitute*) harga dari peubahnya ke dalam rumus fungsi. Masalahnya, bagaimana kalau persamaan fungsi tersebut tidak diketahui. Yang tersedia hanyalah beberapa buah data diskrit (*discrete*) dalam bentuk tabel. Persoalan semacam nomor (v) ini acapkali muncul pada pengamatan fenomena alam, baik berupa eksperimen di laboratorium maupun penelitian di lapangan yang melibatkan beberapa parameter (misalnya suhu, tekanan, waktu, dan sebagainya). Pengamat tidak mengetahui relasi yang menghubungkan parameter-parameter itu. Pengamat hanya dapat mengukur nilai-nilai parameter tersebut dengan menggunakan alat ukur seperti sensor, termometer, barometer, dan sebagainya. Tidak satupun metode analitik yang yang tersedia untuk menyelesaikan persoalan jenis ini. Begitu juga soal nomor (vi) melahirkan pertanyaan yang sama, bagaimana menghitung nilai turunan fungsi bila fungsinya sendiri tidak diketahui?.

Pada soal nomor (vii), tidak ada teknik integrasi yang dapat digunakan untuk fungsi yang bentuknya rumit itu. Begitu juga pada soal nomor (viii), tidak terdapat metode persamaan diferensial untuk menyelesaikannya. Dengan kata lain, persoalan (vii) dan (viii) tidak mempunyai solusi analitik.

1.1 Metode Analitik versus Metode Numerik

Contoh-contoh yang dikemukakan di atas memperlihatkan bahwa kebanyakan persoalan matematika tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik. Metode analitik disebut juga **metode sejati** karena ia memberi kita **solusi sejati** (*exact solution*) atau solusi yang sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki **galat** (*error*) sama dengan nol! Sayangnya, metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri sederhana serta bermatra rendah [CHA88]. Padahal persoalan yang muncul dalam dunia nyata seringkali nirlanjar serta melibatkan bentuk dan proses yang rumit. Akibatnya nilai praktis penyelesaian metode analitik menjadi terbatas.

Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan sebenarnya masih dapat dicari dengan menggunakan **metode numerik**. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harafiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka.

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Bandingkan dengan metode analitik yang biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi mateamtik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.

Kedua, dengan metode numerik, kita hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga **solusi hampiran** (*approxomation*) atau **solusi pendekatan**, namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang kita inginkan. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*).

Sebagai contoh ilustrasi penyelesaian dengan metode numerik, pandanglah sebuah persoalan integrasi-tentu berikut

$$I = \int_{-1}^{1} (4 - x^2)\,dx \qquad \text{(P.1.2)}$$

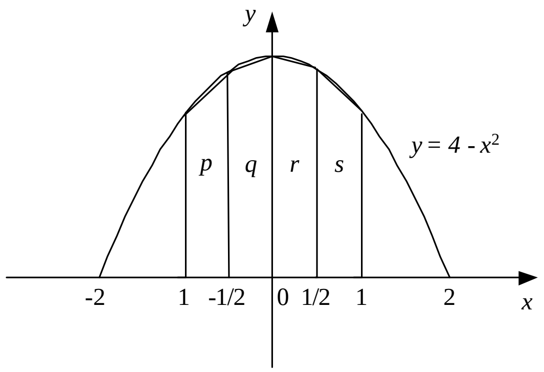
Dengan metode analitik, kita dapat menemukan solusi sejatinya dengan mudah. Di dalam kalkulus integral tentu kita mengetahui teknik pengintegralan untuk fungsi sederhana:

$$\int ax^n dx = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + C \qquad \text{(P.1.3)}$$

Maka, berdasarkan (P.1.3), kita dapat melakukan pengintegralan suku-suku dari fungsi integralnya lalu menghitung nilai integral-tentunya sebagai berikut:

$$I = \int_{-1}^{1} (4 - x^2)\,dx = [\,4x - x^3/3\,]_{x=-1}^{x=1} = \{4(1) - (1)/3\} - \{4(-1) - (-1)/3\} = 22/3$$

Perhatikanlah bahwa $4x - x^3/3$ adalah solusi analitik dalam bentuk fungsi matematik, sedangkan 22/3 adalah nilai numerik integral-tentu yang diperoleh dengan cara mengevaluasi fungsi matematik tersebut untuk batas-batas integrasi $x = 1$ dan $x = -1$.



Gambar 1.1 Integrasi $f(x) = 4 - x^2$ secara numerik

Bandingkan penyelesaian di atas bila persoalan integrasi tersebut diselesaikan dengan metode numerik sebagai berikut. Sekali lagi, di dalam kalkulus integral kita tentu masih ingat bahwa interpretasi geometri integral $f(x)$ dari $x = a$ sampai $x = b$ adalah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x)$, sumbu-x, dan garis $x = a$ dan $x = b$. Luas daerah tersebut dapat *dihampiri* dengan cara sebagai berikut. Bagilah daerah integrasi [-1, 1] atas sejumlah trapesium dengan lebar 0.5 (Gambar 1.1). Maka, luas daerah integrasi dihampiri dengan luas kempat buah trapesium, atau

$$\begin{aligned} I &\approx p + q + r + s \qquad\qquad \text{(P.1.4)} \\ &\approx \{[f(-1) + f(-1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(-1/2) + f(0)] \times 0.5/2\} + \\ &\quad \{[f(0) + f(1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(1/2) + f(1)] \times 0.5/2\} \\ &\approx 0.5/2\ \{f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)\} \\ &\approx 0.5/2\ \{3 + 7.5 + 8 + 7.5 + 3\} \\ &\approx 7.25 \end{aligned}$$

yang merupakan solusi hampiran (tanda "$\approx$" artinya "kira-kira") terhadap solusi sejati (22/3). Galat solusi hampiran terhadap solusi sejati adalah

$$\text{galat} = |7.25 - 22/3| = |7.25 - 7.33\ldots| = 0.08333...$$

Tentu saja kita dapat memperkecil galat ini dengan membuat lebar trapesium yang lebih kecil (yang artinya jumlah trapesium semakin banyak, yang berarti jumlah komputasi semakin banyak). Contoh ini juga memperlihatkan bahwa meskipun solusi dengan metode numerik merupakan hampiran, tetapi hasilnya dapat dibuat seteliti mungkin dengan mengubah parameter komputasi (pada contoh perhitungan integral di atas, lebar trapesium yang dikurangi).

1.2 Metode Numerik dalam Bidang Rekayasa

Dalam bidang rekayasa, kebutuhan untuk menemukan solusi persoalan secara praktis adalah jelas. Dari kacamata rekayasawan, masih tampak banyak cara penyelesaian persoalan matematik yang dirasa terlalu sulit atau dalam bentuk yang kurang kongkrit. Penyelesaian analitik yang sering diberikan oleh kaum matematika kurang berguna bagi rekayasawan, karena ia harus dapat mentransformasikan solusi matematika yang sejati ke dalam bentuk berwudud yang biasanya meninggalkan kaidah kesejatiannya [BES97]. Solusi hampiran biasanya sudah memenuhi persyaratan rekayasa dan dapat diterima sebagai solusi. Lagipula, banyak persoalan matematika dalam bidang rekayasa yang hanya dapat dipecahkan secara hampiran. Kadang-kadang dapat pula terjadi bahwa metode analitik hanya menjamin keberadaan (atau hanya mengkarakteristikkan beberapa properti umum) solusi, tetapi tidak memberikan cara menemukan solusi tersebut[KRE88].

Bagi rekayasawan, solusi yang diperoleh secara analitik kurang kurang berguna untuk tujuan numerik. Persoalan rekayasa dalam prakteknya tidak selalu membutuhkan solusi dalam bentuk fungsi matematika menerus (*continuous*). Rekayasawan seringkali menginginkan solusi dalam bentuk numerik, misalnya persoalan integral tentu dan persamaan diferensial. Sebuah contoh dalam termodinamika dikemukakan di bawah ini untuk memperjelas pernyataan ini [KRE88].

Sebuah bola logam dipanaskan sampai pada suhu 100°C. Kemudian, pada saat t = 0, bola itu dimasukkan ke dalam air yang bersuhu 30°C. Setelah 3 menit, suhu bola berkurang menjadi 70°C. Tentukan suhu bola setelah 22.78 menit menit. Diketahui tetapan pendinginan bola logam itu adalah 0.1865.

Dengan menggunakan hukum pendinginan Newton, laju pendinginan bola setiap detiknya adalah

$$dT/dt = -k(T - 30)$$

yang dalam hal ini k adalah tetapan pendinginan bola logam yang harganya 0.1865. Bagi matematikawan, untuk menentukan suhu bola pada t = 22.78 menit, persamaan diferensial tersebut harus diselesaikan terlebih dahulu agar suhu T sebagai fungsi dari waktu t ditemukan. Persamaan diferensial ini dapat diselesaikan dengan metode kalkulus diferensial. Solusi umumnya adalah

$$T(t) = ce^{-kt} + 30$$

Nilai awal yang diberikan adalah $T(0)=100$. Dengan menggunakan nilai awal ini, solusi khusus persamaan diferensial adalah

$$T(t) = 70e^{-0.1865\,t} + 30$$

Dengan menyulihkan $t = 22.78$ ke dalam persamaan T, diperoleh

$$T(22.78) = 70e^{-0.1865 \times 22.78} + 30 = 31°\text{C}.$$

Jadi, suhu bola setelah 22.78 menit adalah 31°C.

Bagi rekayasawan, solusi persamaan diferensial yang berbentuk fungsi menerus ini tidak terlalu penting (bahkan beberapa persamaan diferensial tidak dapat dicari solusi khususnya karena memang tidak ada teknik yang baku untuk menyelesaikannya). Dalam praktek di lapangan, seringkali para rekayasawan hanya ingin mengetahui berapa suhu bola logam setelah t tertentu misalnya setelah 30 menit tanpa perlu mencari solusi khususnya dalam bentuk fungsi terlebih dahulu. Rekayasawan cukup memodelkan sistem ke dalam persamaan diferensial, lalu solusi untuk t tertentu dicari secara numerik.

1.3 Apakah Metode Numerik Hanya untuk Persoalan Matematika yang Rumit Saja?

Tentu saja tidak! Anda jangan berpikiran bahwa metode numerik hanya dapat menyelesaikan persoalan rumit saja. Metode numerik berlaku umum, yakni ia dapat diterapkan untuk menyelesaikan persoalan matematika sederhana (yang juga dapat diselesaikan dengan metode analitik) maupun persoalan matematika yang tergolong rumit (yang metode analitik pun belum tentu dapat menyelesaikannya). Sebagai contoh, dengan metode numerik kita dapat menghitung integral

$$\int_0^p \sqrt{1 + \cos^2(x)}\,dx$$

sama mudahnya menghitung

$$\int_0^1 2x^2\,dx$$

1.4 Peranan Komputer dalam Metode Numerik

Komputer berperan besar dalam perkembangan bidang metode numerik. Hal ini mudah dimengerti karena perhitungan dengan metode numerik adalah berupa operasi aritmetika seperti penjumlahan, perkalian, pembagian, plus membuat perbandingan. Sayangnya, jumlah operasi aritmetika ini umumnya sangat banyak dan berulang, sehingga perhitungan secara manual sering menjemukan. Manusia (yang melakukan perhitungan manual ini) dapat membuat kesalahan dalam melakukannya. Dalam hal ini, komputer berperanan mempercepat proses perhitungan tanpa membuat kesalahan.

Penggunaan komputer dalam metode numerik antara lain untuk memprogram. Langkah-langkah metode numerik diformulasikan menjadi program komputer. Program ditulis dengan bahasa pemrograman tertentu, seperti FORTRAN, PASCAL, C, C++, BASIC, dan sebagainya.

Sebenarnya, menulis program numerik tidak selalu diperlukan. Di pasaran terdapat banyak program aplikasi komersil yang langsung dapat digunakan. Beberapa contoh aplikasi yang ada saat ini adalah *MathLab*, *MathCad*, *Maple*, *Mathematica*, *Eureka*, dan sebagainya. Selain itu, terdapat juga *library* yang berisi rutin-rutin yang siap digabung dengan program utama yang ditulis pengguna, misalnya *IMSL* (*International Mathematical and Statistical Library*) *Math/Library* yang berisi ratusan rutin-rutin metode numerik.

Selain mempercepat perhitungan numerik, dengan komputer kita dapat mencoba berbagai kemungkinan solusi yang terjadi akibat perubahan beberapa parameter. Solusi yang diperoleh juga dapat ditingkatkan ketelitiannya dengan mengubah-ubah nilai parameter.

Kemajuan komputer digital telah membuat bidang metode numerik berkembang secara dramatis. Tidak ada bidang matematika lain yang mengalami kemajuan penting secepat metode numerik. Tentu saja alasan utama penyebab kemajuan ini adalah perkembangan komputer itu sendiri, dari komputer mikro sampai komputer *Cray*, dan kita melihat perkembangan teknologi komputer tidak pernah berakhir. Tiap generasi baru komputer menghadirkan keunggulan seperti waktu, memori, ketelitian, dan kestabilan perhitungan. Hal ini membuat ruang penelitian semakin terbuka luas. Tujuan utama penelitian itu adalah pengembangan algoritma numerik yang lebih baik dengan memanfaatkan keunggulan komputer semaksimal mungkin. Banyak algoritma baru lahir atau perbaikan algoritma yang lama didukung oleh komputer.

Bagian mendasar dari perhitungan rekayasa yang dilakukan saat ini adalah perhitungan "waktu nyata" (*real time computing*), yaitu perhitungan keluaran (hasil) dari data yang diberikan dilakukan secara simultan dengan *event* pembangkitan data tersebut, sebagaimana yang dibutuhkan dalam mengendalikan proses kimia atau reaksi nuklir, memandu pesawat udara atau roket dan sebagainya [KRE88]. Karena itu, kecepatan perhitungan dan kebutuhan memori komputer adalah pertimbangan yang sangat penting.

Jelaslah bahwa kecepatan tinggi, keandalan, dan fleksibilitas komputer memberikan akses untuk penyelesaian masalah praktek. Sebagai contoh, solusi sistem persamaan lanjar yang besar menjadi lebih mudah dan lebih cepat diselesaikan dengan komputer. Perkembangan yang cepat dalam metode numerik antara lain ialah penemuan metode baru, modifikasi metode yang sudah ada agar lebih mangkus, analisis teoritis dan praktis algoritma untuk proses perhitungan baku, pengkajian galat, dan penghilangan jebakan yang ada pada metode [KRE88].

1.5 Mengapa Kita Harus Mempelajari Metode Numerik?

Seperti sudah disebutkan pada bagian awal bab ini, para rekayasawan dan para ahli ilmu alam, dalam pekerjaannya sering berhadapan dengan persamaan matematik. Persoalan yang muncul di lapangan diformulasikan ke dalam model yang berbentuk persamaan matematika. Persamaan tersebut mungkin sangat kompleks atau jumlahnya lebih dari satu. Metode numerik, dengan bantuan komputer, memberkan cara penyelesaian persoalan matematika dengan cepat dan akurat.

Terdapat beberapa alasan tambahan mengapa kita harus mempelajari metode numerik [CHA91]:

1. Metode numerik merupakan alat bantu pemecahan masalah matematika yang sangat ampuh. Metode numerik mampu menangani sistem persamaan besar, kenirlanjaran, dan geometri yang rumit yang dalam praktek rekayasa seringkali tidak mungkin dipecahkan secara analitik.
2. Seperti sudah disebutkan pada upapab 1.4, di pasaran banyak tersedia program aplikasi numerik komersil. Penggunaan aplikasi tersebut menjadi lebih berarti

bila kita memiliki pengetahuan metode numerik agar kita dapat memahami cara paket tersebut menyelesaikan persoalan.

3. Kita dapat membuat sendiri program komputer tanpa harus membeli paket programnya. Seringkali beberapa persoalan matematika yang tidak selalu dapat diselesaikan oleh program aplikasi. Sebagai contoh, misalkan ada program aplikasi tertentu yang tidak dapat dipakai untuk menghitung integrasi lipat dua, $\iint$, atau lipat tiga, $\iiint$. Mau tidak mau, kita harus menulis sendiri programnya. Untuk itu, kita harus mempelajari cara pemecahan integral lipat dua atau lebih dengan metode numerik.
4. Metode numerik menyediakan sarana untuk memperkuat kembali pemahaman matematika. Karena, metode numerik ditemukan dengan menyederhanakan matematika yang lebih tinggi menjadi operasi matematika yang mendasar.

1.6 Tahap-Tahap Memecahkan Persoalan Secara Numerik

Ada enam tahap yang dilakukan dakam pemecahan persoalan dunia nyata dengan metode numerik, yaitu

1. **Pemodelan**

   Ini adalah tahap pertama. Persoalan dunia nyata dimodelkan ke dalam persamaan matematika (lihat contoh ilustrasi pada upabab 1.2)

2. **Penyederhanaan model**

   Model matematika yang dihasilkan dari tahap 1 mungkin saja terlalu kompleks, yaitu memasukkan banyak peubah (variable) atau parameter. Semakin kompleks model matematikanya, semakin rumit penyelesaiannya. Mungkin beberapa andaian dibuat sehingga beberapa parameter dapat diabaikan. Contohnya, faktor gesekan udara diabaikan sehingga koefisian gesekan di dalam model dapat dibuang. Model matematika yang diperoleh dari penyederhanaan menjadi lebih sederhana sehingga solusinya akan lebih mudah diperoleh.

3. **Formulasi numerik**

   Setelah model matematika yang sederhana diperoleh, tahap selanjutnya adalah memformulasikannya secara numerik, antara lain:

   a. menentukan metode numerik yang akan dipakai bersama-sama dengan analisis galat awal (yaitu taksiran galat, penentuan ukuran langkah, dan sebagainya).

Pemilihan metode didasari pada pertimbangan:

- apakah metode tersebut teliti?
- apakah metode tersebut mudah diprogram dan waktu pelaksanaannya cepat?
- apakah metode tersebut tidak peka terhadap perubahan data yang cukup kecil?

b. menyusun algoritma dari metode numerik yang dipilih.

4. **Pemrograman**

   Tahap selanjutnya adalah menerjemahkan algoritma ke dalam program komputer dengan menggunakan salah satu bahasa pemrograman yang dikuasai.

5. **Operasional**

   Pada tahap ini, program komputer dijalankan dengan data uji coba sebelum data yang sesungguhnya.

6. **Evaluasi**

   Bila program sudah selesai dijalankan dengan data yang sesungguhnya, maka hasil yang diperoleh diinterpretasi. Interpretasi meliputi analisis hasil *run* dan membandingkannya dengan prinsip dasar dan hasil-hasil empirik untuk menaksir kualitas solusi numerik, dan keputusan untuk menjalankan kembali program dengan untuk memperoleh hasil yang lebih baik.

1.7 Peran Ahli Informatika dalam Metode Numerik

Dari tahap-tahap pemecahan yang dikemukan di atas, tahap 1 dan 2 melibatkan para pakar di bidang persoalan yang bersangkutan. Kalau persoalannya dalam bidang eknik Sipil, maka orang dari bidang Sipil-lah yang menurunkan model matematikanya. Kalau persoalannya menyangkut bidang Teknik Kimia (TK), maka ahli Teknik Kimia-lah yang mempunyai kemmapuan membentuk model matematikanya.

Dimanakah peran orang Informatika? Orang Informatika baru berperan pada tahap 3 dan 4, dan 5. Tetapi, agar lebih memahami dan menghayati persoalan, sebaiknya orang Informatika juga ikut dilibatkan dalam memodelkan, namun perannya hanyalah sebagai pendengar.

Tahap 6 memerlukan kerjasama informatikawan dengan pakar bidang bersangkutan. Bersama-sama dengan pakar, informatikawan mendiskusikan hasil numerik yang diperoleh, apakah hasil tersebut sudah dapat diterima, apakah perlu dilakukan perubahan parameter, dsb.

1.8 Perbedaan Metode Numerik dengan Analisis Numerik

Untuk persoalan tertentu tidaklah cukup kita hanya menggunakan metode untuk memperoleh hasil yang diinginkan; kita juga perlu mengetahui apakah metode tersebut memang memberikan solusi hampiran, dan seberapa bagus hampiran itu [BUC92]. Hal ini melahirkan kajian baru, yaitu **analisis numerik**.

Metode numerik dan analisis numerik adalah dua hal yang berbeda. Metode adalah algoritma, menyangkut langkah-langkah penyelesaian persoalan secara numerik, sedangkan analisis numerik adalah terapan matematika untuk menganalisis metode [NOB72]. Dalam analisis numerik, hal utama yang ditekankan adalah analisis galat dan kecepatan konvergensi sebuah metode. Teorema-teorema matematika banyak dipakai dalam menganalisis suatu metode. Di dalam buku ini, kita akan memasukkan beberapa materi analisis numerik seperti galat metode dan kekonvergenan metode.
Tugas para analis numerik ialah mengembangkan dan menganalisis metode numerik. Termasuk di dalamnya pembuktian apakah suatu metode konvergen, dan menganalisis batas-batas galat solusi numerik.Terdapat banyak sumber galat, diantaranya tingkat ketelitian model matematika, sistem aritmetik komputer, dan kondisi yang digunakan untuk menghentikan proses pencarian solusi. Semua ini harus dipertimbangkan untuk menjamin ketelitian solusi akhir yang dihitung.

1.9 Materi Apa yang Terdapat di dalam Buku Ini?

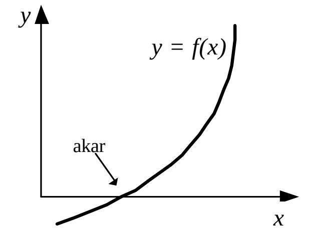
Ada enam pokok bahasan yang ditulis di dalam buku ini:

1. Solusi persamaan nirlanjar.
2. Solusi sistem persamaan lanjar.
3. Interpolasi polinom.
4. Turunan numerik.
5. Integrasi numerik.
6. Solusi persamaan diferensial biasa dengan nilai awal.

Ringkasan masing-masing pokok bahasan 1 sampai 6 adalah sebagai berikut:

1. Solusi persamaan nirlanjar

Selesaikan $f(x) = 0$ untuk x.

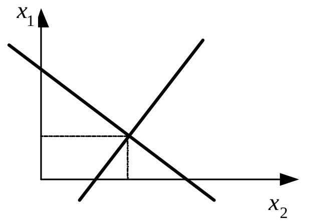


2. Solusi sistem persamaan lanjar

Selesaikan sistem persamaan lanjar

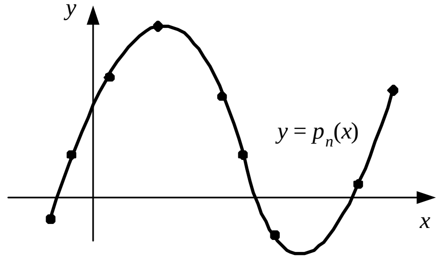
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

untuk harga-harga x_1 dan x_2.



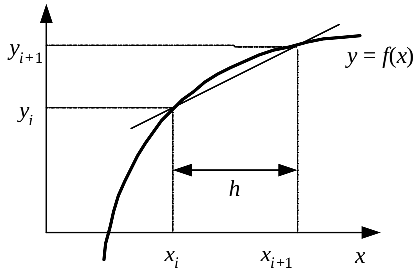
3. Interpolasi polinom

Diberikan titik-titik (x_0,y_0), (x_1,y_1), …, (x_n,y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang melalui semua titik tersebut



4. Turunan numerik

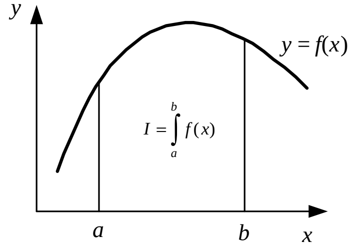
Diberikan titik (x_i, y_i) dan titik (x_{i+1}, y_{i+1}). Tentukan $f'(x_i)$.



5. **Integrasi numerik**

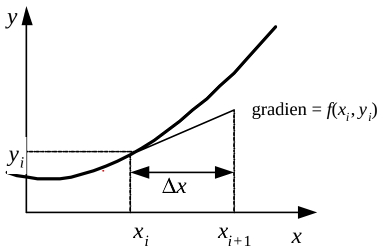
Hitung integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$



6. **Solusi persamaan diferensial biasa dengan nilai awal**

Diberikan $dy/dx = f(x,y)$ dan
dengan nilai awal $y_0 = y(x_0)$
Tentukan nilai $y(x_t)$ untuk $x_t \in R$



Sebelum menjelaskan keenam pokok bahasan tersebut, kita perlu terlebih dahulu mengerti konsep galat dalam metode numerik. Konsep galat diberikan sebagai topik tersendiri.

Perjalanan seribu mil dimulai dari satu langkah
(pepatah)