Kalkulasi Pergerakan Robot dengan Transformasi Lanjar

Sekar Anglila Hapsari / 13514069
Program Studi Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
13514069@std.stei.itb.ac.id

Abstrak— Aljabar lanjar merupakan salah satu subjek yang paling banyak implementasinya dalam kehidupan sehari-hari. Transformasi lanjar merupakan bagian dari aljabar lanjar yang telah diimplementasikan. Berbagai permasalahan telah diselesaikan dengan menggunakan transformasi lanjar. Salah satunya adalah mekanisme pergerakan robot. Dalam makalah ini, akan dibahas mekanisme perhitungan pergerakan robot yang menggunakan transformasi lanjar.

***Kata Kunci*—Transformasi lanjar, matriks transformasi, rotasi**

I. PENDAHULUAN

Di abad ke-21 ini, manusia terus mencari cara untuk mempermudah cara kerja segala hal. Manusia berlomba-lomba membuat teknologi terbaik. Inovasi-inovasi teknologi terus bermunculan tanpa henti. Perkembangan teknologi ini dapat terjadi karena adanya implementasi dari berbagai macam ilmu. Salah satu ilmu yang digunakan merupakan aljabar lanjar.

Pembuatan robot merupakan salah satu ciptaan manusia yang bertujuan untuk mempermudah manusia di masa depan. Robot merupakan suatu benda mekanik yang beroperasi dengan menggunakan program komputer. Robot bekerja dengan otomatis, sesuai dengan program yang telah ditanamkan dari awal. Robot diciptakan untuk membantu manusia dalam pekerjaannya. Jenis pekerjaan yang dimaksud adalah pekerjaan yang repetitif atau terlalu berat. Sebab, manusia mempunyai banyak limitasi dan robot merupakan solusi untuk limitasi-limitasi tersebut.

Gambar 1 : Robot[1]

Robot telah menjadi fantasi manusia sejak zaman dahulu. Tidak sedikit film dan buku yang tokohnya merupakan robot. Robot telah menjadi begitu populer dan ikonik di dekade ini. Bukan hanya menjadi imajinasi, robot kini telah direalisasikan, dan mampu melakukan berbagai hal yang luar biasa. Sekarang, robot sudah semakin mirip dengan manusia. Baik dari cara berpikir maupun pergerakannya.

Algoritma yang digunakan untuk membuat robot tersebut harus dibuat seefisien mungkin. Untuk itu, digunakan matriks tranformasi untuk membuat algoritma pergerakan robot yang efisien dan mendukungnya untuk segala kondisi. Transformasi lanjar dengan menggunakan matriks transformasi akan membantu robot dalam perhitungan pergerakannya. Seluruh pergerakan yang dilakukan oleh robot dihitung terlebih dahulu dengan menggunakan matriks transformasi.

II. DASAR TEORI

2.1 Matriks

Matriks merupakan kumpulan bilangan yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk sebuah segi-empat. Matriks mempunyai notasi a_{ij}. Dimana a menandakan matriks tersebut, i adalah baris (i = 1, 2, ..., m), dan j adalah kolom (j = 1, 2, ..., n). Orde matriks atau ukuran matriks adalah m x n.

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. \\ a_{m1} & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ada beberapa jenis matriks yang sering digunakan. Berikut adalah penjabarannya,

a) Matriks Persegi
   Matriks persegi atau bujur sangkar adalah matriks yang mempunyai jumlah kolom dan baris yang sama (m x m).
b) Matriks Diagonal
   Matriks diagonal adalah matriks persegi yang elemen yang tidak terletak pada i = j (diagonal) bernilai 0. Jika seluruh elemen diagonal bernilai 1 maka merupakan matriks identitas.
c) Matriks Segitiga

Matriks segitiga merupakan matriks persegi yang elemennya membentuk sebuah segitiga dan yang tidak bagian dari segitiga tersebut bernilai 0. Ada dua macam matriks segitiga, yaitu matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Gambar 2 : Matriks Segitiga Atas[2]

d) Matriks Transpos
Matriks transpos mempunyai notasi A^t. Matriks transpos mengubah letak elemennya, elemen baris menjadi elemen kolom dan sebaliknya. Sehingga ukuran matriks yang mula-mula *m* x *n* menjadi *n* x *m* dengan semua elemen pada letak barunya.

e) Matriks Simetri
Matriks simetri adalah matriks yang letak seluruh elemennya tetap sama walaupun telah di transpos. Atau dengan kata lain, matriks A = matriks A^t.

Matriks dapat digunakan untuk mempermudah kalkulasi dalam aljabra lanjar, salah satunya dalam transformasi lanjar. Untuk itu, akan dibahas operasi-operasi dalam matriks. Berikut adalah penjabarannya,

a) Penjumlahan
Penjumlahan antara dua matriks atau lebih dilakukan seperti operasi penjumlahan pada biasanya, namun dilakukan perelemen sesuai dengan letaknya. Sehingga, untuk penjumlahan matriks A dan matriks B, dilakukan penjumlahan untuk setiap unsurnya dan menghasilkan matriks hasil C. ($c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$).

b) Perkalian matriks
Ada dua jenis perkalian matriks, perkalian skalar atau perkalian antara 2 matriks. Perkalian skalar matriks,

$$k \times A$$

berarti mengalikan setiap elemen matriks dengan konstanta *k*. Sedangkan perkalian antara 2 matriks, misalnya matriks A dengan matriks B, hanya bisa dilakukan jika jumlah kolom matriks A dan jumlah baris matriks B adalah sama. Maka jika,

$$A_{mxn} \times B_{nxq} = C_{mxq}$$

Dengan setiap unsur C sebagai hasil perkalian dari setiap elemen baris matriks A dengan elemen kolom matriks B. Berikut adalah contohnya,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}$$

Gambar 3 : Perkalian Antara Dua Matriks[3]

2.2 Vektor

Vektor merupakan besaran dengan arah dalam bentuk bilangan real. Ada beberapa operasi yang dapat dilakukan dalam vektor, antara lain:

a) Penjumlahan
Penjumlahan dua buah vektor atau lebih dapat dilakukan dengan menggamparkan proyeksi kedua vektor dan menghitung panjang dan koordinatnya atau menjumlahkan semua elemen vektor sesuai dengan sumbunya.
Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ maka $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_n + w_n)$

b) Pengurangan
Pengurangan dua buah vektor atau lebih dapat dilakukan dengan mengurangi elemen vektor sesuai dengan sumbunya.
Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ maka $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, ..., v_n - w_n)$

c) Perkalian Skalar
Perkalian vektor dapat dilakukan dengan mengalikan semua elemen vektor dengan *k*.
Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ maka $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, ..., kv_n)$

d) Perkalian Titik
Perkalian titik dua vektor atau lebih dapat dilakukan dengan mengalikan semua elemen vektor dengan sesuai dengan sumbunya dan menjumlahkan hasilnya.
Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ maka $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + ... + v_n \cdot w_n)$. Atau

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||. \cos\theta$$

dengan θ sebagai sudut antara **v** dan **w**. ||**v**|| dan ||**w**|| merupakan panjang vektor yang diperoleh dengan

$$||\mathbf{v}|| = (v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2)^{1/2}$$

Begitu pula untuk ||**w**||.

e) Perkalian Silang
Perkalian silang dua vektor dapat diselesaikan dengan cara berikut:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k}$$

Gambar 4 : Perkalian Silang Dua Vektor[4]

Ruang Vektor (R^n) merupakan semua vektor kolom dengan jumlah komponen *n*. Sebuah ruang vektor terdiri dari himpunan vektor V, dan dapat dilakukan operasi penjumlahan dan pengurangan terhadapnya.

Terdapat 6 aksioma yang dapat dipenuhi oleh ruang vektor, yaitu:

a) Closure (tertutup)
Untuk semua **u** dan **v** dalam ruang vektor V, dan *k*

dalam R, maka:

$$\mathbf{v} + \mathbf{v} \in V \quad (1)$$

$$k\mathbf{u} \in V \quad (2)$$

b) Komutatif

Untuk semua **u** dan **v**, maka:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (3)$$

c) Asosiatif

Untuk semua **u**, **v**, dan **w** dalam ruang vektor V

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad (4)$$

d) Identitas

Untuk semua **v** dalam ruang vektor V terdapat 0 dan 1, sehingga:

$$\mathbf{v} + 0 = \mathbf{v} \quad (5)$$

$$1 \,.\, \mathbf{v} = \mathbf{v} \quad (6)$$

e) Balikan (invers)

Untuk semua **v** dalam ruang vektor V terdapat –**v**, sehingga:

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = 0 \quad (7)$$

f) Distributif

Untuk semua **u**, **v**, dan **w** dalam ruang vektor V dan k_1, k_2, dan k dalam skalar, maka:

$$k(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v} \quad (8)$$

$$(k_1 + k_2)\mathbf{w} = k_1\mathbf{w} + k_2\mathbf{w} \quad (9)$$

2.3 Transformasi Lanjar

Transformasi merupakan pemetaan dari suatu himpunan ke himpunan lainnya. Salah satu hal yang bisa ditransformasi lanjar adalah kepada ruang vektor. Ketika dilakukan transformasi lanjar kepada ruang vektor tersebut, seluruh operasi standar seperti penjumlahan dan perkalian skalar akan tetap berlaku. Sehingga dapat dijabarkan seperti dibawah ini,

a) $T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$ (10)

b) $T(\alpha\mathbf{a}) = \alpha \,.\, T(\mathbf{a})$ (11)

Maka jika V dan W merupakan ruangan vektor, $T : V \rightarrow W$ disebut sebagai transformasi lanjar jika syarat diatas terpenuhi dengan setiap **a**, **b** $\in$ V dan $\alpha \in$ R.

Berlaku pula beberapa dari hal ini, yaitu jika $T : V \rightarrow W$ merupakan transformasi lanjar dan $\boldsymbol{v} \in V$ dan $\boldsymbol{w} \in W$, maka

a) $T(0) = 0$ (12)

b) $T(-\boldsymbol{v}) = -T(\boldsymbol{v})$ (13)

c) $T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{v}) - T(\boldsymbol{w})$ (14)

Transformasi lanjar mempengaruhi setiap elemen dalam sebuah ruang vektor. Sehingga ketika dilakukan sebuah transformasi lanjar pada sebuah ruang vektor R^n menjadi R^m, nilai setiap elemen pada *n*-dimensi tersebut akan berubah juga. Sehingga, didapatkan beberapa matriks transformasi yang menggambarkan pemetaan ruang vektor tersebut. Berikut adalah penjabarannya,

a) Pencerminan terhadap sumbu Y

Mengubah semua vektor menjadi refleksinya terhadap sumbu Y. Matriks transformasinya adalah,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gambar 5 : Matriks Transformasi Pencerminan terhadap sumbu Y[5]

b) Pencerminan terhadap sumbu X

Mengubah semua vektor menjadi refleksinya terhadap sumbu X. Matriks transformasinya adalah,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gambar 6 : Matriks Transformasi Pencerminan terhadap Sumbu X[6]

c) Pencerminan terhadap Y = X

Mengubah semua vektor menjadi refleksinya terhadap garis Y = X. Matriks transformasinya adalah,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gambar 7 : Matriks Transformasi Pencerminan terhadap Garis Y= X[7]

d) Ekspansi dan Kompresi

Mengekspansi ($c > 0$) atau mengkompresi ($c < 0$) setiap vektor sebesar faktor *c*, berikut adalah matriks transformasinya

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Gambar 8 : Matriks Transformasi Ekspansi dan Kompresi[8]

e) Geseran

Menggeser vektor sebesar vektor *k* pada salah satu sumbunya. Berikut adalah matriks transformasinya,

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

Gambar 9 : Matriks Transformasi Geser (*Shear*)[9]

f) Rotasi

Merotasi seluruh ruang vektor berdasarkan sudut yang ditentukan. Berikut adalah matriks transformasinya,

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gambar 10 : Matriks Transformasi Rotasi[10]

g) Proyeksi

Memproyeksi suatu ruang vektor ke subruang dengan dimensi yang lebih rendah. Berikut adalah matriks transformasinya,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 11: Matriks Trasformasi Proyeksi Vektor (x,y) menjadi (x,0)[11]

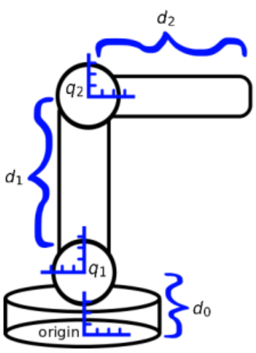
Matriks transformasi akan membantu kalkulasi pergerakan robot, khusunya matriks transformasi rotasi.

III. PEMBAHASAN

3.1 Kalkulasi Pergerakan Robot dalam 2-D

Seperti yang telah dijelaskan pada pendahuluan, robot merupakan suatu benda mekanik yang beroperasi dengan menggunakan program komputer. Tentu saja, sebuah robot dapat bergerak. Ada yang sudah diprogram untuk bergerak dengan cara tertentu, ada juga yang bisa memperhitungkan pergerakannya sendiri.

Robot memperhitungkan pergerakannya dengan transformasi lanjar. Salah satu contoh robot yang menggunakan cara ini adalah robot PUMA. Berikut adalah penjabaran aplikasi transformasi lanjar pada robot.

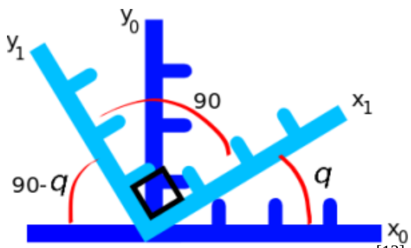


Gambar 12 : Gambar Lengan Robot[12]

Jika dilihat dari gambar 13, dapat dilihat bahwa lengan robot terdiri dari dua sendi, yaitu q_1 dan q_2. Kedua hal itu bisa menjadi bagian dari ruang vektor Q.

P adalah ujung lengan, jika Q[x, y], maka dari gambar tersebut akan menghasilkan P = Q[d_2, d_1 + d_0]. Namun masih belum dihitung rotasi-rotasi yang harus dilakukan. Untuk itu, kita harus mengetahui sudut sendi-sendi robot dan posisi relatif dari koordinat ruang. Sehingga kita dapat menghitung koordinat dari posisi tujuan.

Jika dilakukan sebuah rotasi, akan dihasilkan sesuatu seperti gambar berikut,



Gambar 13 : Rotasi Lengan Robot[13]

Dari gambar diatas, dapat dilihat bahwa lengan dirotasi sebanyak q derajat. Dapat dilihat pula koordinat asal (x_0 dan y_0) dan koordinat akhir (x_1 dan y_1) dari lengan tersebut. Maka, harus dicari dimana ujung lengan akan berakhir yaitu poin P, dengan cara sebagai berikut

$$P_{x_0} = \cos(q) P_{x_1} \quad (15)$$
$$P_{y_0} = \cos(90 + q) P_{y_1} \quad (16)$$

Jika (15) dan (16) dihubungkan, maka akan didapatkan persamaan,

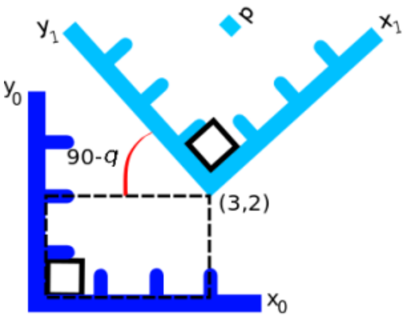
$$P_{x_0} = \cos(q) P_{x_1} - \sin(q) P_{y_1} \quad (17)$$
$$P_{y_0} = \sin(\mathrm{q}) P_{x_1} + \sin(q) P_{y_1} \quad (18)$$

Dari persamaan (17) dan (18), dihasilkan sebuah matriks posisi akhir yaitu,

$$P_0 = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) \\ sin(q_0) & \cos(q_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_1} \\ P_{y_1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Yaitu menunjukkan bahwa rotasi lengan robot dapat diperhitungkan dengan transformasi matriks rotasi. (19) menghasilkan suatu matriks transformasi R_0^1, dimana menunjukkan bahwa semua vektor dalam ruang vektor 1 harus dikalikan dengan matriks transformasi R_0^1 untuk menjadi ruang vektor 0.

Setelah hal ini telah dilakukan, harus dilakukan proses translasi. Hal ini karena tidak semua sendi dalam satu posisi, sehingga perlu dilakukan perhitungan lain untuk memperhitungkan jarak antaranya.



Gambar 14 : Rotasi dan Translasi Lengan Robot[14]

Dari gambar 15 dapat dilihat bahwa ruang vektor 1 terletak pada (3, 2) dalam ruang vektor 0, dan telah dirotasi 45 derajat. Untuk memperhitungkan pergerakan ini, akan diperlukan matriks transformasi rotasi R_0^1. Selain itu, dibutuhkan juga jarak antara kedua vektor, yaitu d = (3, 2) dalam kasus ini. Maka akan dihasilkan sebuah matriks transformasi,

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & d_x \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

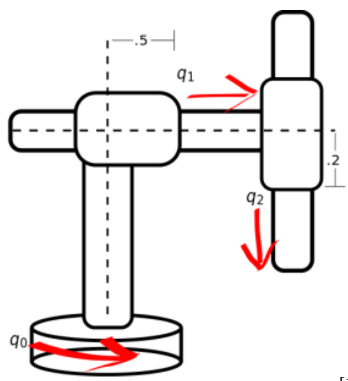
Jika p_x dan p_y merupakan bagian dari P atau poin akhir lengan, maka P terletak di (2, 2) menurut ruang vektor 1. Sehingga, jika semua nilai dimasukkan kedalam matriks transformasi (20)

$$T_0^1 .\ P = \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 3 \\ \sin(45) & \cos(45) & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Maka akan dihasilkan poin P = (3, 4.8285) di ruang vektor 1. Sehingga, dari penjabaran diatas dapat dibuktikan bahwa pergerakan robot dapat dikalkulasikan dengan transformasi lanjar.

3.2 Kalkulasi Pergerakan Robot dalam 3-D

Dalam subbab 3.1, telah dibahas kalkulasi pergerakan robot dalam 2-D. Namun, untuk kehidupan nyata, dibutuhkan kalkulasi dalam 3-D. Berikut adalah gambaran lengan robot secara 3 dimensi.



Gambar 15 : Lengan Robot 3 – D[15]

Lengan robot diatas berputar terhadap sumbu *z*. Dengan menggunakan pola pikir dan prinsip diatas, kita bisa mendapatkan matriks transformasi dibawah ini,

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & 0 \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Baris ketiga dalam (22) menunjukkan bahwa tidak terjadi rotasi terhadap sumbu *z*. Lalu, dengan menerapkan jarak antara ruang-ruang vektor, akan dihasilkan matriks transformasi sebagai berikut

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & 0 & d_x \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Lalu, seperti dalam penjelasan kalkulasi pegerakan matriks dalam 2 dimensi, matriks transformasi (23) dikalikan dengan posisi P untuk mengetahui posisi ujung lengan terhadap posisi original.

Matriks transformasinya tidak berhenti disini. Untuk setiap rotasi dan jarak yang ada atau terjadi, akan ada matriks transformasi lainnya. Untuk itu, harus dilakukan perkalian antara seluruh matriks transformasi yang didapatkan agar mendapatkan hasil akhir.

IV. Konklusi

Aljabar geometri merupakan suatu pengetahuan yang luas dan berguna. Salah satu aplikasi aljabar geometri yang sangat berguna adalah aplikasi transformasi lanjar pada kalkulasi pergerakan robot. Dari makalah ini, telah didapatkan beberapa matriks transformasi yang berguna, antara lain:

a) Matriks transformasi dalam 2 dimensi

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & d_x \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Matriks transformasi dalam 3 dimensi

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & 0 & d_x \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks diatas dapat digunakan untuk memperhitungkan posisi akhir. Dalam konteks ini, posisi akhir dari bagian robot yang bergerak. Matriks diatas mempermudah manusia untuk memrogram robot dalam pergerakannya, sehingga sudah ada rumus universal untuk berbagai gerakan yang mungkin dilakukan robot kedepannya.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini, Penulis mengucapkan terima kasih kepada Tuhan YME yang telah memberi kesempatan dan kemampuan agar Penulis dapat belajar dan menuliskan makalah ini serta terus berkarya. Penulis juga ingin berterima kasih kepada kedua orangtua Penulis serta teman-teman Penulis. Penulis juga mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya untuk Drs. Judhi Santoso, M.Sc. dan Bapak Dr.Ir. Rinaldi Munir, MT. selaku dosen pengajar mata kuliah Aljabar Geometri yang telah mengajar dan membimbing Penulis semester ini. Terakhir, Penulis ingin berterima kasih kepada siapapun yang telah membantu dalam penulisan makalah ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] http://news.vanderbilt.edu/vanderbiltmagazine/wp content/uploads/RobotEvolution.jpg, diakses pada 5 Desember 2015.
[2] https://upload.wikimedia.org/math/1/8/c/18ce41891c53151b1383eaef38c8b397.png, diakses pada 12 Desember 2015.
[3] http://3.bp.blogspot.com/-ElpMsXxfkSo/VGMKP2nrEnI/AAAAAAAAFao/ElZeakeXvYo/s1600/soal-dan-pembahasan-perkalian-matriks.image.png, diakses pada 12 Desember 2015.
[4] https://qph.is.quoracdn.net/main-qimg-60dca492ddb1b09fea7c4da0bad6d4a2?convert_to_webp=true, diakses pada 14 Desember 2015.
[5] http://4.bp.blogspot.com/-WR_cl7Leo6k/T_jid9ToHcI/AAAAAAAAANg/xwug-fE-IWc/s1600/2.jpg, diakses pada 15 Desember 2015.
[6] http://2.bp.blogspot.com/-z5KG5SZhkJE/T_jiMQ1i3eI/AAAAAAAAANM/w4mll7SSVEo/s1600/1.jpg, diakses pada 15 Desember 2015.
[7] http://2.bp.blogspot.com/-NZIAqhYhsTM/T_jiwKRjbRI/AAAAAAAAANw/k6lrqQRf0MA/s1600/4.jpg, diakses pada 15 Desember 2015.
[8] Strang, Gilbert. 2006. "*Linear Algebra and Its Applications*" Hal. 141. Brooks Cole.
[9] https://www.cs.cornell.edu/courses/CS1110/2012fa/assignments/assignment5/images/form-shear.png, diakses pada 15 Desember 2015.
[10] https://ikkholis27.files.wordpress.com/2010/10/persrot.jpg, diakses pada 15 Desember 2015.
[11] Refrensi [8]
[12] https://studywolf.files.wordpress.com/2013/08/robot_coordinate_frames1.png, diakses pada 15 Desember 2015.
[13] https://studywolf.files.wordpress.com/2013/08/rotation1.png, diakses pada 15 Desember 2015.
[14] https://studywolf.files.wordpress.com/2013/08/rotation_and_distance.png, diakses pada 15 Desember 2015.
[15] https://studywolf.files.wordpress.com/2013/08/robot_coordinate_frames_3d1.png, diakses pada 15 Desember 2015.
[16] Anonim. "*Introduction to Robotics*". http://www.galileo.org/robotics/intro.html, diakses pada 5 Desember 2015.
[17] Anonim. "*Transformation Matrix*". http://mathforum.org/mathimages/index.php/Transformation_Matrix, diakses pada 12 Desember 2015.
[18] Catatan Pribadi Kuliah Aljabar Geometri IF2123
[19] DeWolf, Travis. 2013. "*Robot Control Part 1: Forward Transformation Matrices*". https://studywolf.wordpress.com/2013/08/21/robot-control-forward-transformation-matrices/, diakses pada 15 Desember 2015.
[20] Moningka, Steven. 2013. "*Kinematika Manipulator Robot*". http://stev77.blogspot.co.id/2013/04/kinematika-manipulator-robot.html, diakses pada 15 Desember 2015.
[21] Strang, Gilbert. 2006. "*Linear Algebra and Its Applications*". Brooks Cole.
[22] Woodford, Chris. 2007. "*Robots*". http://www.explainthatstuff.com/robots.html, diakses pada 12 Desember 2015.

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 15 Desember 2015

Sekar Angila Hapsari / 13514069