# Algoritma Branch & Bound

(Bagian 2)

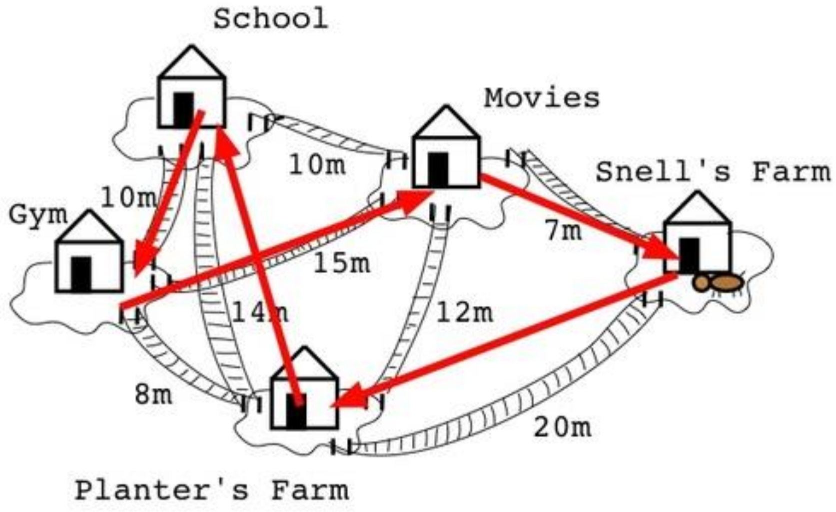
Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Oleh: Rinaldi, Nur Ulfa Maulidevi, Masayu Leylia Khodra

Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB
2025

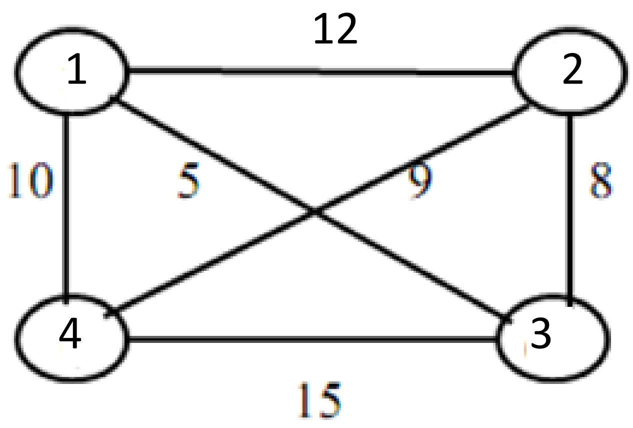
# Travelling Salesperson Problem (TSP)

**Persoalan**: Diberikan *n* buah kota (vertex) serta diketahui jarak (bobot) antara setiap kota satu sama lain. Temukan perjalanan (*tour*) dengan jarak <u>terpendek</u> yang dilakukan  oleh seorang pedagang sehingga ia melalui setiap kota tepat hanya sekali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

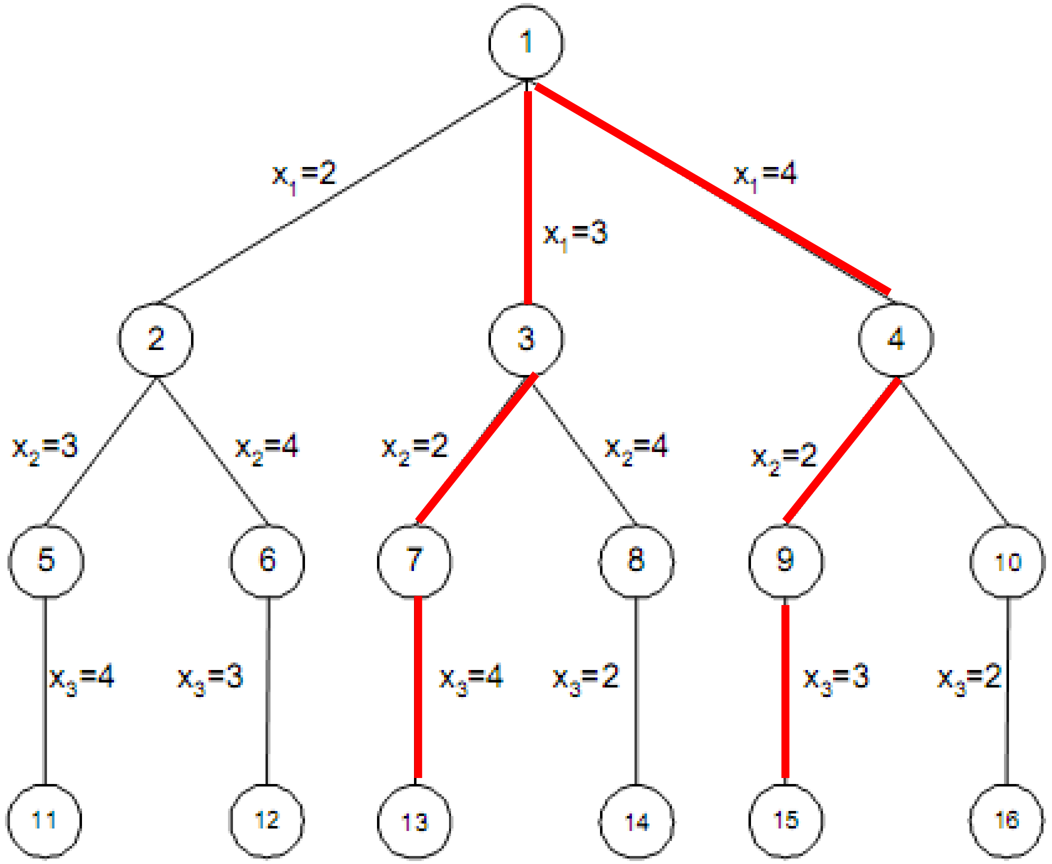



Terdapat ($n$ – 1)! tur di dalam graf lengkap dengan $n$ simpul

# Pohon Ruang Status TSP $n$ = 4 Simpul




Simpul awal perjalanan = 1



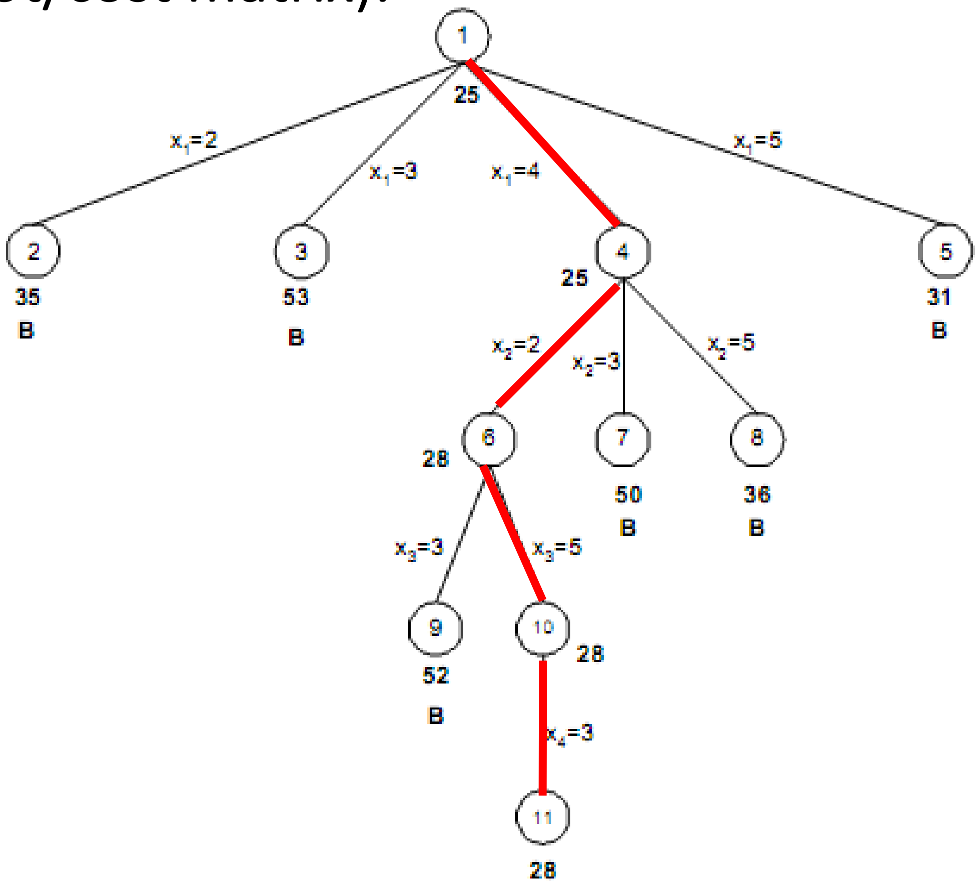

Solusi: 1-3-2-4-1 atau 1-4-2-3-1

Bobot = 5+8+9+10 =32

# Penyelesaian TSP dengan B & B

Contoh lain TSP 5 simpul (matriks bobot/cost matrix):

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$




*Brute Force*:
- 4!=24 sirkuit hamilton
- Solusi: 1-4-2-5-3-1
- Bobot: 10+6+2+7+3=28

*Greedy*:
- Solusi: 1-4-5-2-3-1
- Bobot: 10+3+4+16+3=36

B&B-TSP dgn B&B

$x_0 = x_5 = 1$

# Cost dari Simpul Hidup TSP

- *Cost* untuk setiap simpul di dalam pohon ruang status menyatakan nilai batas bawah (*lower bound*) ongkos mencapai simpul solusi dari simpul tersebut. .

- *Cost* setiap simpul dapat dihitung secara heuristik berdasarkan salah satu dari dua cara:
  1. Matriks ongkos-tereduksi (*reduced cost matrix*) dari graf
  2. Bobot minimum tur lengkap

- Masing-masing cara akan dijelaskan satu per satu penggunaannya pada slide berikut.

# 1. Cost berdasarkan *Reduced Cost Matrix*

- Ongkos atau nilai batas untuk setiap simpul dihitung dengan menggunakan matriks ongkos-tereduksi (*reduced cost matrix*) dari graf *G*.

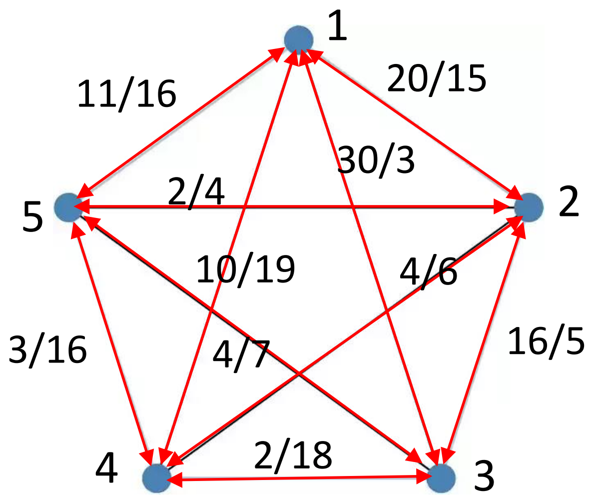
- Sebuah matriks dikatakan tereduksi jika setiap kolom dan setiap barisnya mengandung *paling sedikit* satu buah nol dan semua elemen lainnya non-negatif.

Contoh:

$$\underset{M}{\begin{bmatrix} 12 & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & 8 & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 11 & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & 9 & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & 8 \end{bmatrix}} \xrightarrow{\text{Reduksi baris dan kolom}} \underset{M'}{\begin{bmatrix} 1 & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & 6 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}}$$

- Tinjau sebuah TSP dengan $n$ = 5, graf dinyatakan dalam matriks ketetanggaan:

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$




- Karena perjalanan pedagang di dalam graf melalui sisi ($i$, $j$), dengan $i$ = 1, 2, …, 5 dan $j$ = 1, 2, …, 5, maka mengurangkan setiap elemen pada suatu baris atau pada suatu kolom dengan konstanta $t$ akan mengurangi panjang (bobot) setiap perjalanan sebesar $t$.

- Jika $t$ dipilih dari elemen minimum pada baris $i$ (kolom $j$), maka mengurangkan seluruh elemen pada baris $i$ (kolom $j$) dengan $t$ akan menghasilkan sebuah nol pada baris $i$ (kolom $j$) tersebut. Dengan mengulangi proses ini berulangkali akan menghasilkan matriks bobot tereduksi.

# *Reduced Cost Matrix* (2)

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 10 \\ R_2 - 2 \\ R_3 - 2 \\ R_4 - 3 \\ R_5 - 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ C_1 - 1 \\ C_3 - 3 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} = A$$

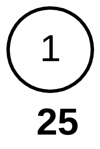
- Jumlah total elemen pengurang dari semua baris dan kolom menjadi batas bawah (*lower bound*) dari tur dengan total bobot minimum. Nilai ini digunakan sebagai nilai  untuk simpul akar pada pohon ruang status.

- Total jumlah semua pengurang = (10 + 2 + 2 + 3 + 4) + (1 + 3) = 25. Nilai 25 ini adalah nilai batas untuk simpul akar,

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 - 10 \\ R_2 - 2 \\ R_3 - 2 \\ R_4 - 3 \\ R_5 - 4 \end{array} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

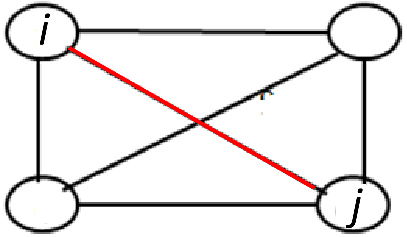
$$\hat{c}(root) = 25$$

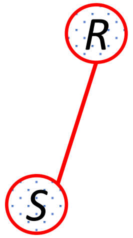
Pohon ruang status saat ini:




$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ C_1 - 1 \\ C_3 - 3 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} = A$$

# B&B-TSP dgn *Reduced Cost Matrix*




- Misalkan:
  - Tur (perjalanan) dimulai dari simpul 1
  - A: matriks tereduksi untuk simpul R.
  - S: anak dari simpul R sehingga sisi (R, S) pada pohon ruang status berkoresponden dengan sisi (i, j) pada perjalanan.
- Jika S bukan simpul daun, maka matriks bobot tereduksi untuk simpul S dapat dihitung sebagai berikut:
  - (a) ubah semua nilai pada baris *i* dan kolom *j* menjadi $\infty$. Ini untuk mencegah agar tidak ada lintasan yang keluar dari simpul *i* atau masuk pada simpul *j*;
  - (b) ubah A(*j*, 1) menjadi $\infty$. Ini untuk mencegah penggunaan sisi (*j*, 1);
  - (c) reduksi kembali semua baris dan kolom pada matriks A kecuali untuk elemen $\infty$.
- Jika *r* adalah total semua pengurang, maka nilai batas untuk simpul S adalah:

$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$

Hasil reduksi ini menghasilkan matriks B.

- Secara umum, persamaan fungsi pembatas (*bounding function*) adalah:

$$\hat{c}(S) = \hat{c}(R) + A(i, j) + r$$

yang dalam hal ini,

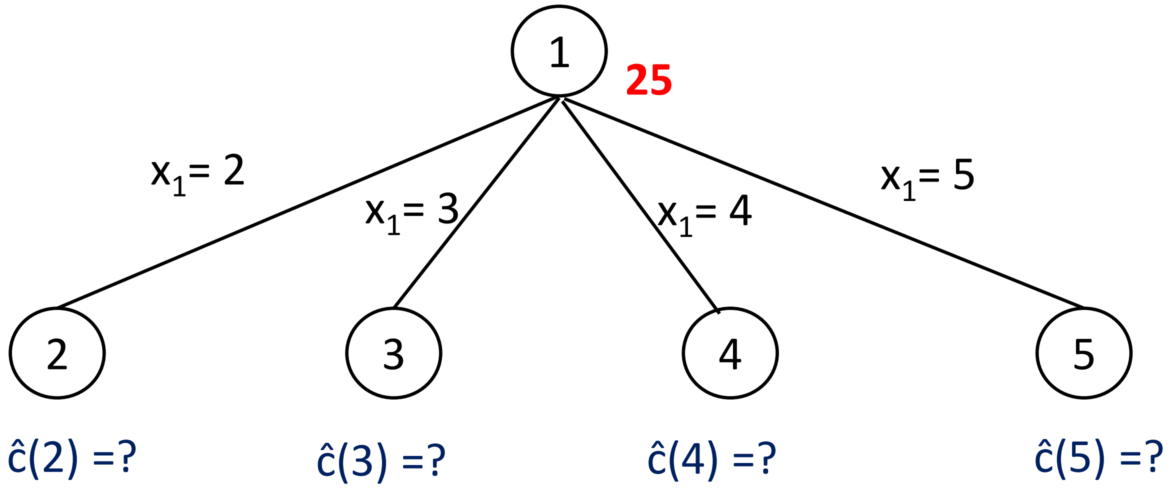
$\hat{c}(S) =$ bobot perjalanan minimum yang melalui simpul $S$ (simpul di pohon ruang status)

$\hat{c}(R) =$ bobot perjalanan minimum yang melalui simpul $R$, yang dalam hal ini $R$ adalah orangtua dari $S$.

$A(i, j) =$ bobot sisi $(i, j)$ pada graf $G$ yang berkoresponden dengan sisi $(R, S)$ pada pohon ruang status.

$r =$ jumlah semua pengurang pada proses memperoleh matriks tereduksi untuk simpul $S$.

- Bangkitkan semua anak dari simpul 1:




- Akan dihitung *cost* atau *bound* untuk simpul 2, 3, 4, dan 5

# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix (2)

1. Simpul 2; Lintasan di dalam graf: 1, 2
   (a) ubah semua nilai pada baris 1 dan kolom 2 menjadi ∞.
   (b) ubah A(2, 1) menjadi ∞. Ini untuk mencegah penggunaan sisi (2, 1)
   (c) reduksi kembali semua baris dan kolom pada matriks A kecuali untuk elemen ∞.

A

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cc} & \text{Kolom2} \\ \text{Baris 1} & \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

(a), (b)

(c): sudah berbentuk matriks tereduksi, *r* = 0

$$\hat{c}(2) = \hat{c}(1) + A(1,2) + r = 25 + 10 + 0 = 35$$

## 2. Simpul 3; Lintasan di dalam graf: 1, 3

$$
\overset{\text{A}}{\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}}
\Rightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \phantom{12} & \phantom{12} & \text{Kolom 3} & \phantom{12} & \phantom{12} \end{array} \\
\text{Baris 1} & \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 11 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}
\end{array}
C_1 - 11
\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix} = B
$$

$$\hat{c}(3) = \hat{c}(1) + A(1,3) + r = 25 + 17 + 11 = 53$$

## 3. Simpul 4; Lintasan di dalam graf: 1, 4

$$
\overset{\text{A}}{\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}}
\Rightarrow
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \phantom{12} & \phantom{12} & \text{Kolom 3} & \phantom{12} & \phantom{12} \end{array} \\
\text{Baris 1} & \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = B
$$

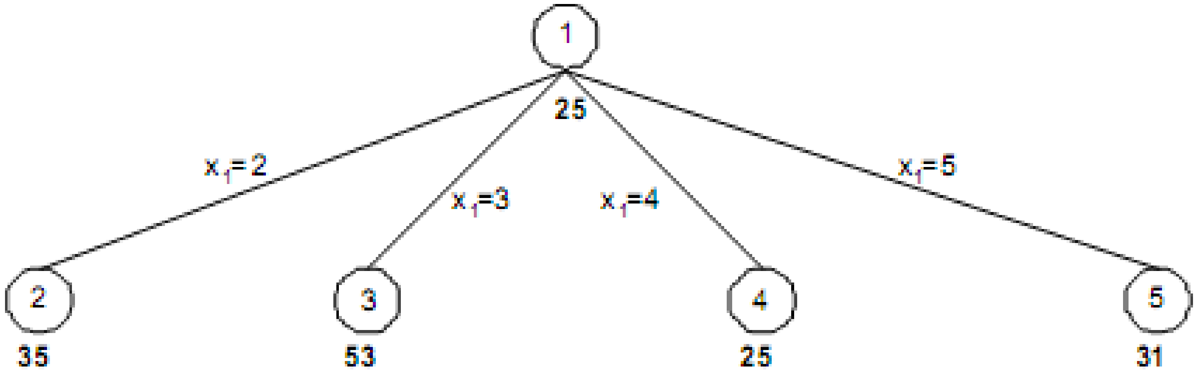
$$\hat{c}(4) = \hat{c}(1) + A(1,4) + r = 25 + 0 + 0 = 25$$

## 4. Simpul 5; Lintasan di dalam graf: 1, 5

$$
A = \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{array}{c c}
 & \text{Kolom 3} \\
\text{Baris 1} & \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & 2 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 15 & 3 & 12 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} R_2 - 2 \\ R_4 - 3 \end{array}
\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 12 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix} = B
$$

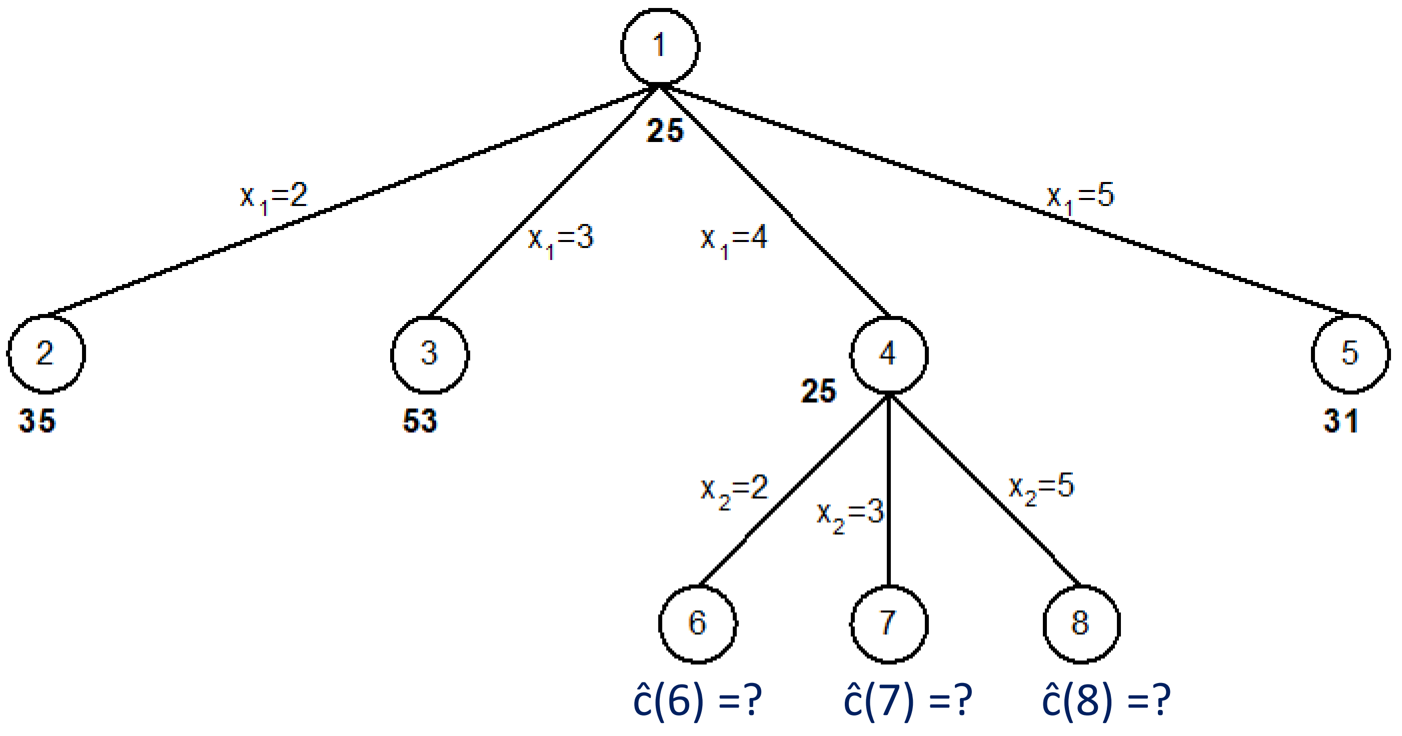
$$\hat{c}(5) = \hat{c}(1) + A(1,5) + r = 25 + 1 + 5 = 31$$

Pohon ruang status yang terbentuk sampai saat ini adalah:

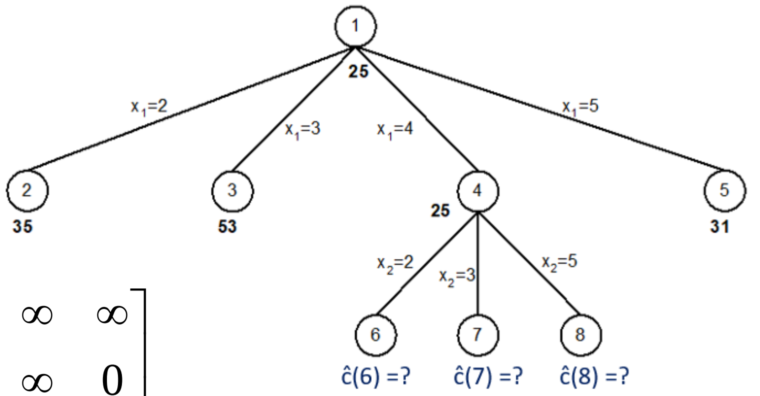



Simpul yang memiliki *cost* terkecil adalah simpul 4, maka simpul 4 menjadi simpul-E

- Simpul-simpul berikutnya yang dibangkitkan adalah simpul 6, 7, dan 8:




- Akan dihitung nilai *cost* untuk simpul 6, 7, dan 8




## 5. Simpul 6; Lintasan di dalam graf: 1, 4, 2

B

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Kolom 2

Baris 4

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = C$$

$$\hat{c}(6) = \hat{c}(4) + B(4,2) + r = 25 + 3 + 0 = 28$$

## 6. Simpul 7; Lintasan di dalam graf: 1, 4, 3

B

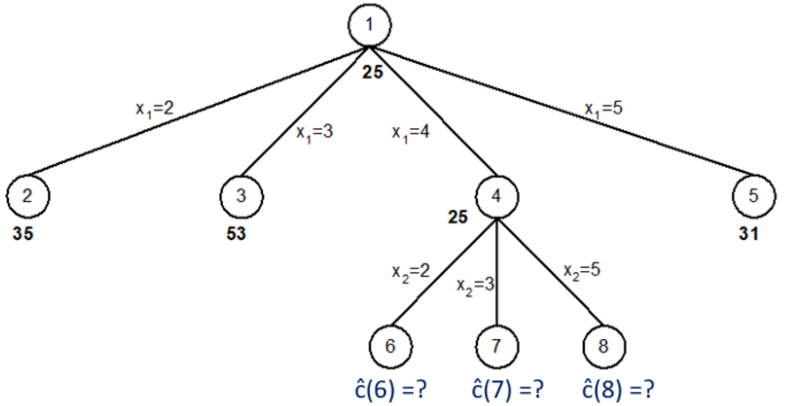
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Kolom 3

Baris 4

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} R_3 - 2 \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} C_1 - 11 \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} = C$$

$$\hat{c}(7) = \hat{c}(4) + B(4,3) + r = 25 + 12 + 13 = 508$$




# 7. Simpul 8; Lintasan di dalam graf: 1, 4, 5

B

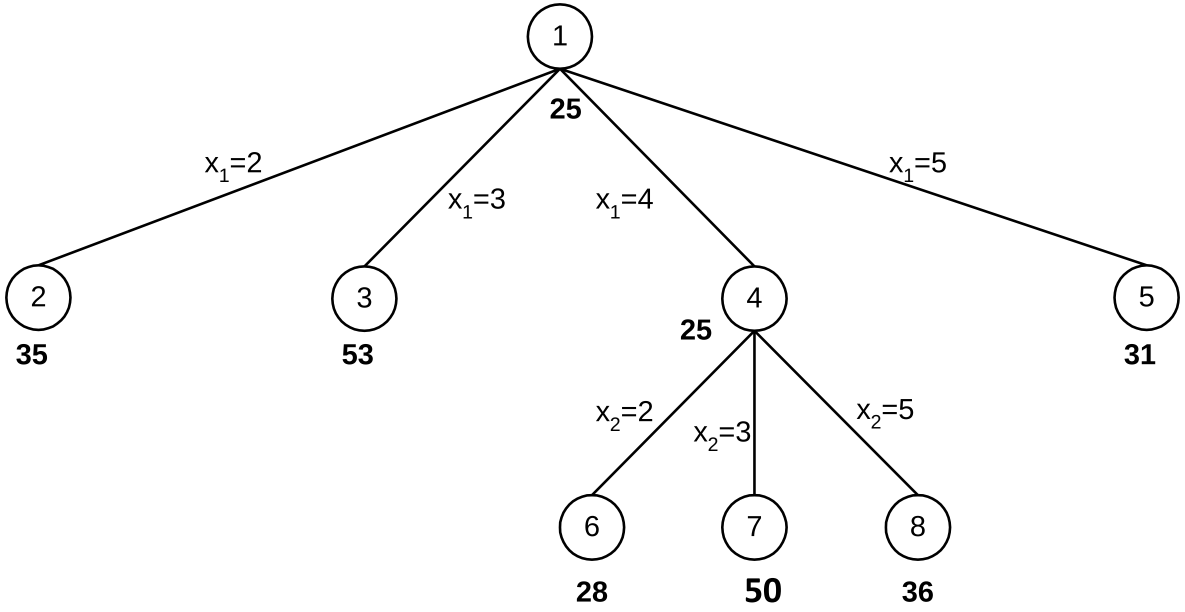
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Baris 4

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} R_2 - 11 \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = C$$

$$\hat{c}(8) = \hat{c}(4) + B(4,5) + r = 25 + 0 + 11 = 36$$

- Pohon ruang status yang terbentuk hingga saat ini:




- Simpul hidup saat ini adalah 2, 3, 5, 6, 7, dan 8. Simpul hidup yang memiliki nilai *cost* terkecil adalah simpul 6.

- Simpul 6 menjadi simpul-E dan akan diekspansi sebagai berikut di bawah ini.

# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix

$$C = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

8. Simpul 9; Lintasan: 1, 4, 2, 3

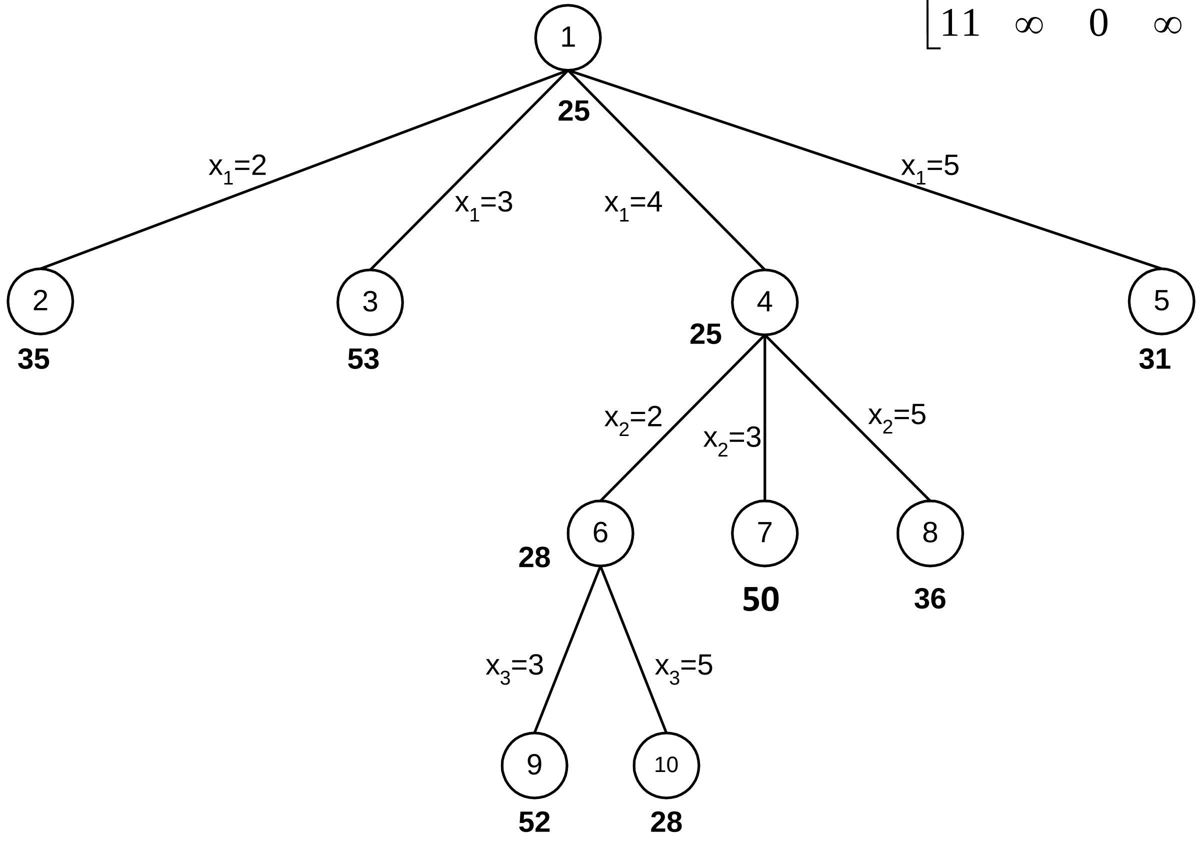
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 - 2 \\ R_5 - 11 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} = D$$

$$\hat{c}(9) = \hat{c}(6) + C(2,3) + r = 28 + 11 + 13 = 52$$

9. Simpul 10; Lintasan: 1, 4, 2, 5

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} = D$$

$$\hat{c}(10) = \hat{c}(6) + C(2,5) + r = 28 + 0 + 0 = 28$$



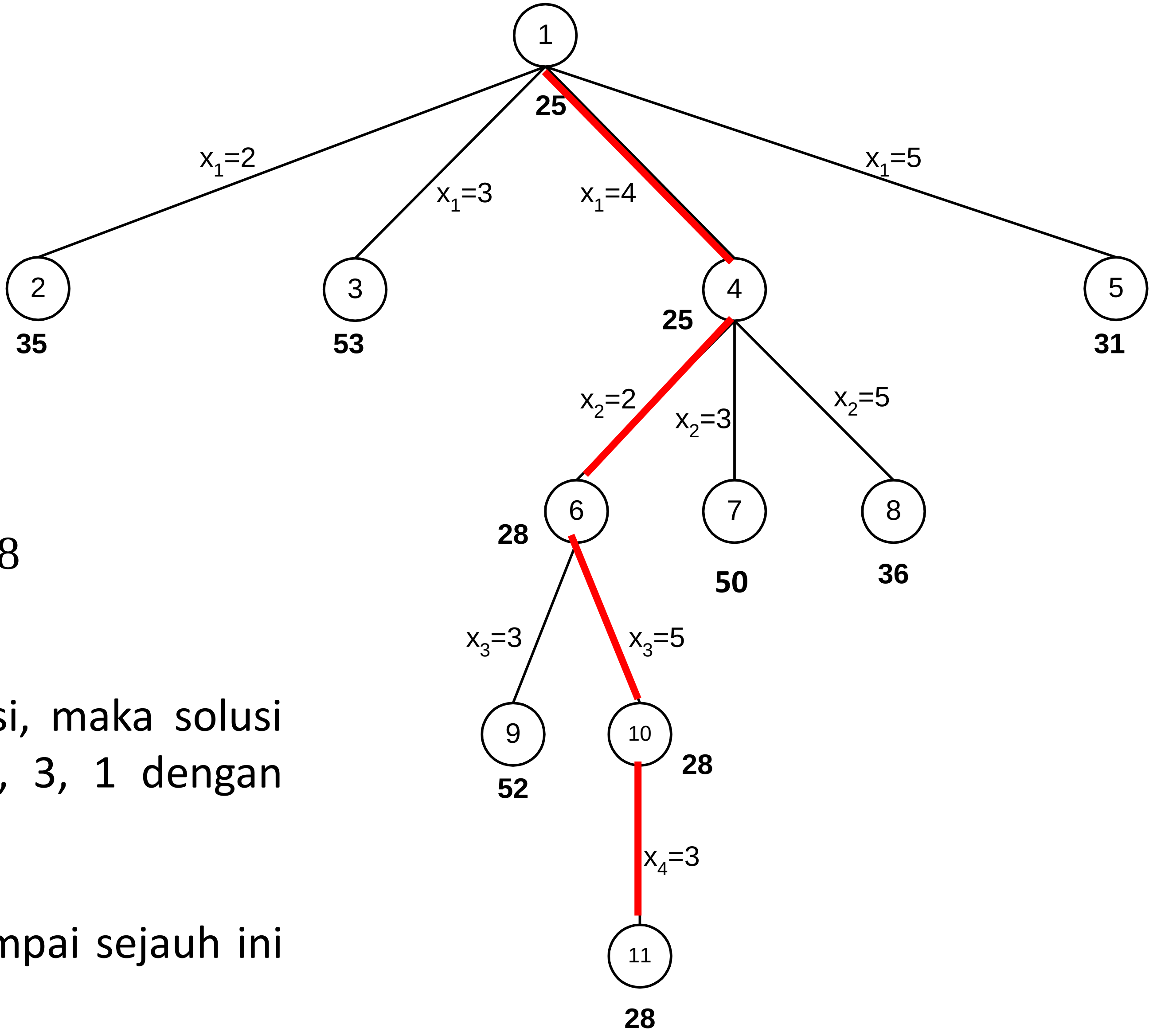

Simpul-simpul hidup: 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10
Simpul dengan cost terkecil: simpul 10
Simpul 10 menjadi simpul-E

# 10. Simpul 11; Lintasan: 1, 4, 2, 5, 3

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$



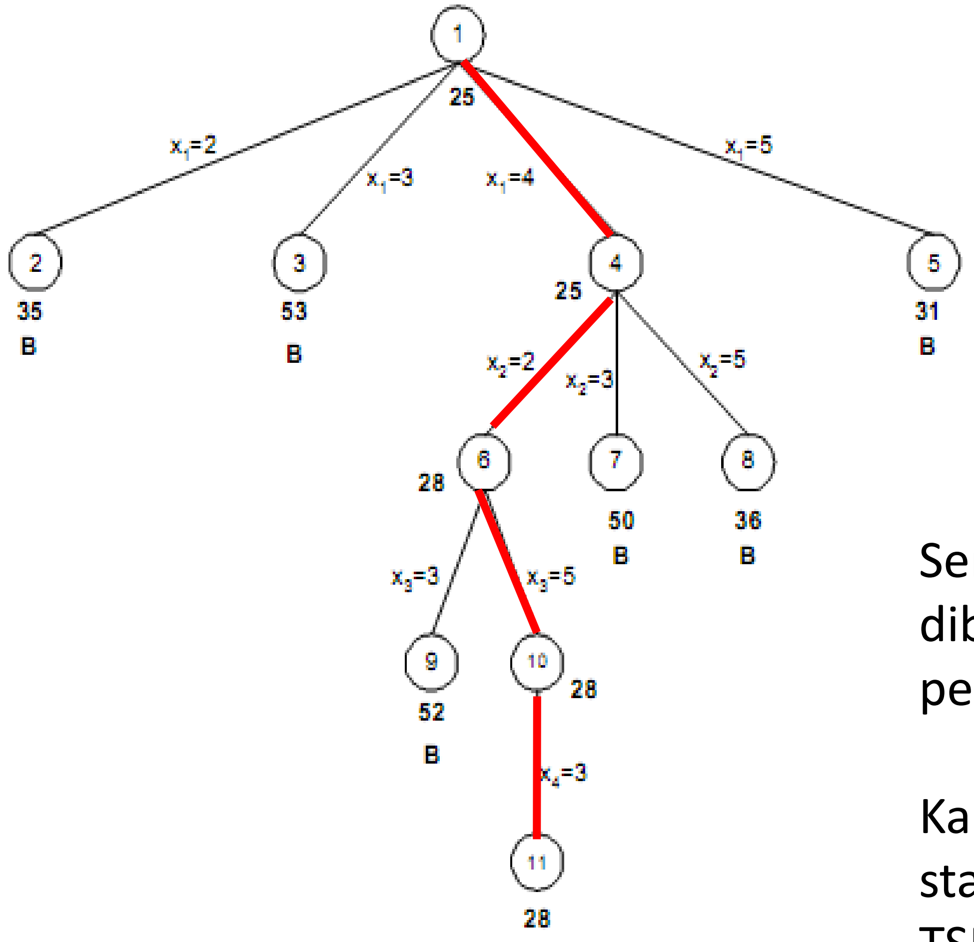
$$\hat{c}(11) = \hat{c}(10) + D(5,3) + r = 28 + 0 + 0 = 28$$




- Karena simpul 11 adalah simpul solusi, maka solusi pertama ditemukan, yaitu 1, 4, 2, 5, 3, 1 dengan panjang 28.

- Solusi ini merupakan solusi terbaik sampai sejauh ini (*the best solution so far*).

# B&B-TSP dgn Reduced Cost Matrix




| Simpul-E | Simpul Hidup |
|---|---|
| 1 | 4,5,2,3 |
| 4 | 6,5,2,8,7,3 |
| 6 | 10,5,2,8,7,9,3 |
| 10 | 11,5,2,8,7,9,3 |
| 11 | daun |

Semua simpul hidup yang nilainya lebih besar dari 28 dibunuh (B) karena tidak mungkin lagi menghasilkan perjalanan dengan bobot < 28.

Karena tidak ada lagi simpul hidup di dalam pohon ruang status, maka *X* = (1, 4, 2, 5, 3, 1) menjadi solusi persoalan TSP di atas dengan bobot 28.

# Latihan

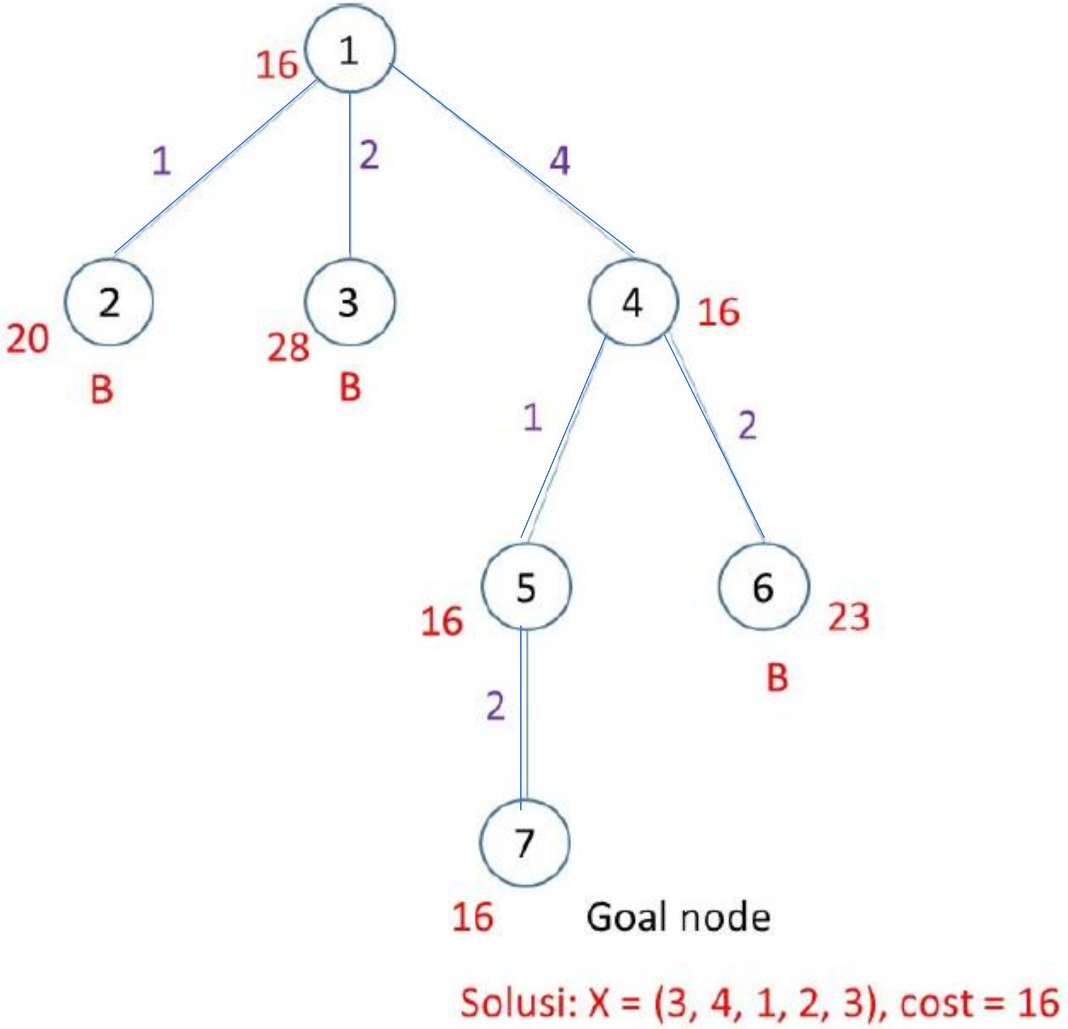
- (TSP) Diberikan sebuah graf lengkap dengan 4 simpul yang dinyatakan dengan matriks berbobot sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 7 & 8 \\ 6 & \infty & 3 & 7 \\ 5 & 8 & \infty & 4 \\ 7 & 6 & 9 & \infty \end{bmatrix}$$

- Simpul diberi nomor 1, 2, 3, dan 4. Jika tur dimulai dari simpul 3 , tentukan tur TSP dengan bobot minimum (dari 3 kembali ke 3 melalui simpul yang lain tepat sekali). Selesaikan persoalan ini dengan algoritma *branch and bound*. *Bound* atau cost dihitung dengan matriks ongkos tereduksi (*reduced cost matices*). Tuliskan jawaban anda dengan menggambarkan pohon ruang status beserta nilai *bound* untuk setiap simpul, solusi dalam bentuk vektor X dan total bobot.

# Penyelesaian:

Pohon ruang status yang terbentuk:



Proses perhitungan *bound* untuk setiap simpul adalah sbb:

1. Menghitung bound untuk simpul 1:

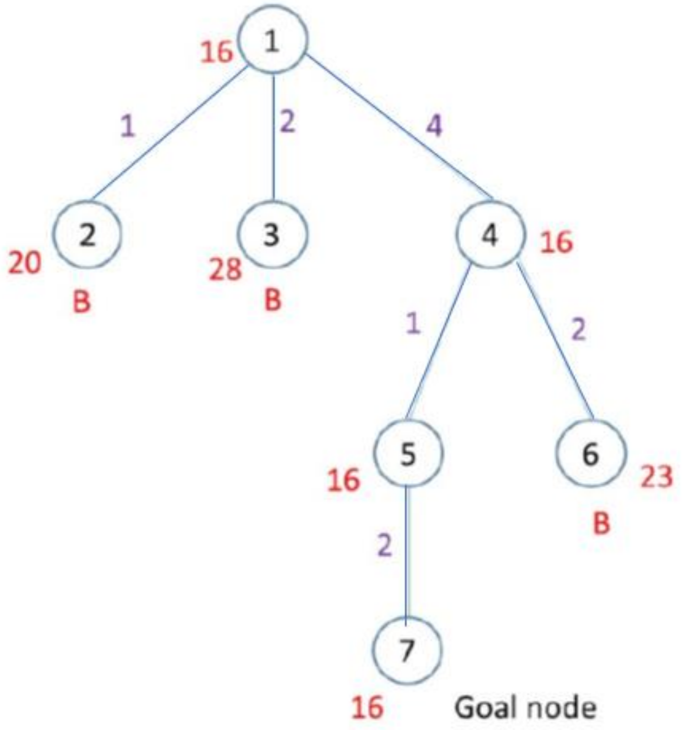
$$\begin{bmatrix} \infty & 2 & 7 & 8 \\ 6 & \infty & 3 & 7 \\ 5 & 8 & \infty & 4 \\ 7 & 6 & 9 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R1-2 \\ R2-3 \\ R3-4 \\ R4-6 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 3 & \infty & 0 & 4 \\ 1 & 4 & \infty & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} C1-1 \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} = A$$

Jumlah semua pengurang = 2 + 3 + 4 + 6 + 1 = 16 → c(1) = 16

2. Menghitung bound untuk simpul 2 (bersesuaia ndengan sisi (3,1) pada graf):

Dari matriks A, ubah nilai pada baris ke-3 dan kolom ke-1 menjadi ∞, lalu ubah nilai A(1, 3) menjadi ∞, lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} C4-4 \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix}$$




Jumlah semua pengurang = r = 4

Nilai bound untuk simpul 2 → c(2) = c(1) + A(3,1) + r = 16 + 0 + 4 = 20

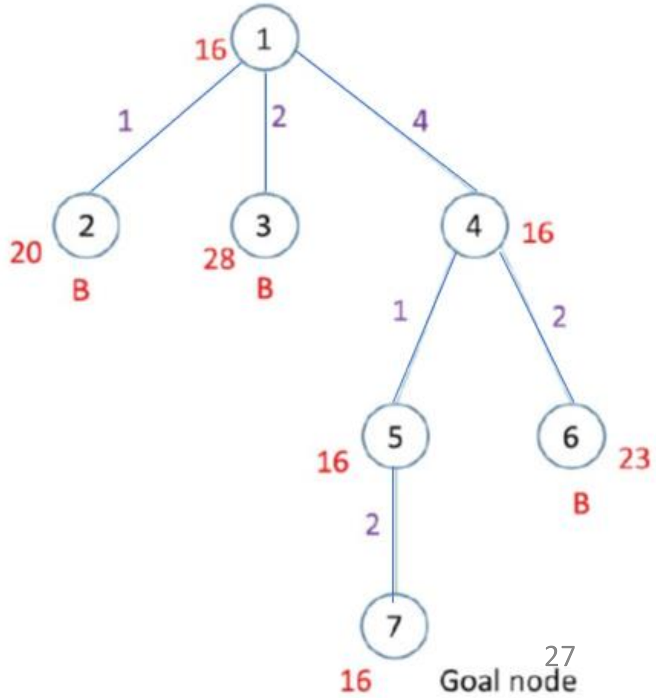
3. Menghitung bound untuk simpul 3 (bersesuaian dengan sisi (3,2) pada graf):

Dari matriks A, ubah nilai pada baris ke-3 dan kolom ke-2 menjadi ∞, lalu ubah nilai A(2, 3) menjadi ∞, lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & 6 \\ 2 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix} \begin{matrix} R1-5 \\ R2-2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & 1 \\ 0 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix} C4-1 \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 3 & \infty \end{bmatrix}$$

Jumlah semua pengurang = r = 5+2 +1 = 8

Nilai bound untuk simpul 3 → c(3) = c(1) + A(3,2) + r = 16 + 4 + 8 = 28



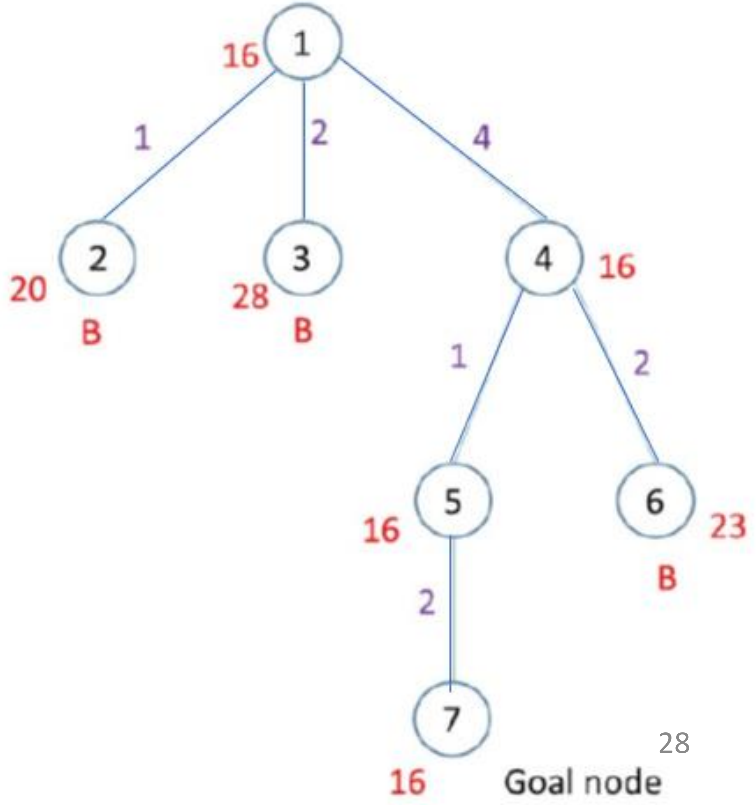
4. Menghitung bound untuk simpul 4 (bersesuaian dengan sisi (3,4) pada graf):

Dari matriks A, ubah nilai pada baris ke-3 dan kolom ke-4 menjadi $\infty$, lalu ubah nilai A(4, 3) menjadi $\infty$, lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & 6 \\ 2 & \infty & 0 & 4 \\ 0 & 4 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak perlu direduksi lagi} = B$$

Jumlah semua pengurang = r = 0

Nilai bound untuk simpul 4 → c(4) = c(1) + A(3,4) + r = 16 + 0  + 0 = 16



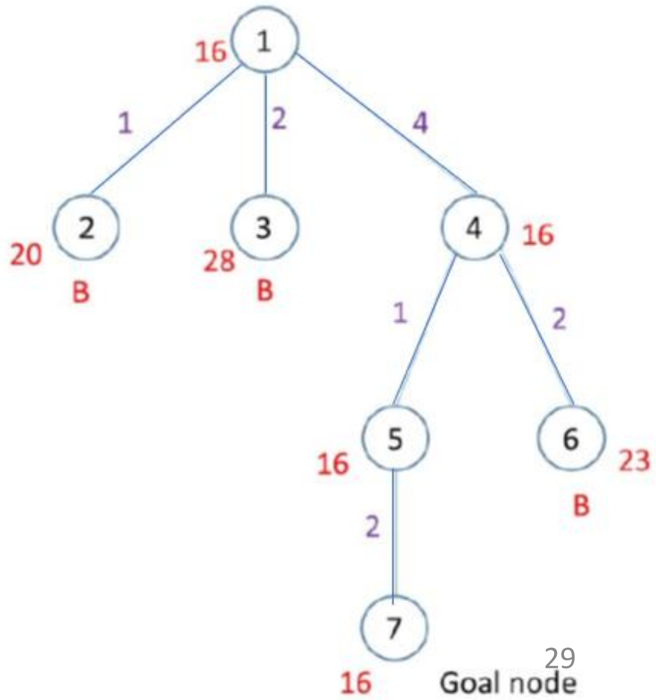
5. Menghitung bound untuk simpul 5 (bersesuaian dengan sisi (4,1) pada graf):

Dari matriks B, ubah nilai pada baris ke-4 dan kolom ke-1 menjadi $\infty$, lalu ubah nilai B(1, 3) menjadi $\infty$, lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak perlu direduksi lagi} = C$$

Jumlah semua pengurang = r = 0

Nilai bound untuk simpul 5 → c(5) = c(4) + B(4,1) + r = 16 + 0 + 0 = 16



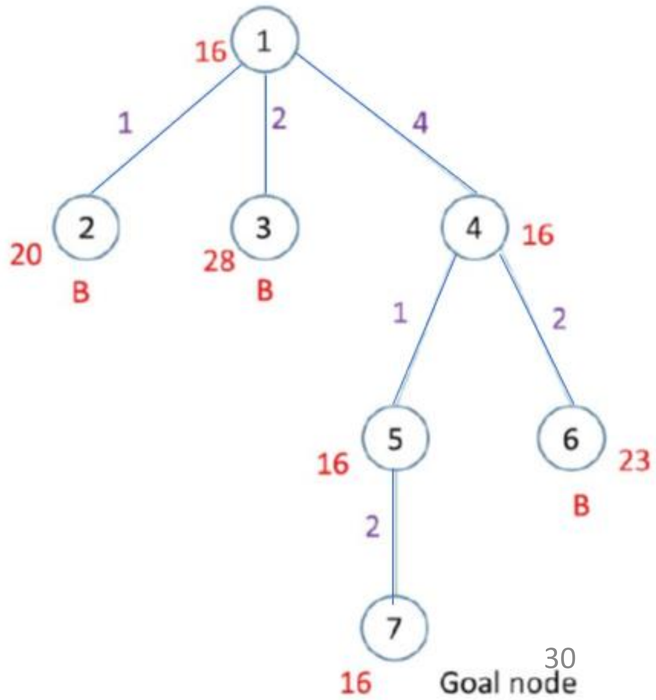
6. Menghitung bound untuk simpul 6 (bersesuaian dengan sisi (4,2) pada graf):

Dari matriks B, ubah nilai pada baris ke-4 dan kolom ke-2 menjadi ∞, lalu ubah nilai B(2, 3) menjadi ∞, lalu reduksi lagi matriksnya

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & \infty \\ 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \begin{array}{c} R1-5 \\ R2-2 \end{array} \begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} = D$$

Jumlah semua pengurang = r = 2 + 5 = 7

Nilai bound untuk simpul 5 → c(5) = c(4) + B(4,1) + r = 16 + 0 + 7 = 23



7. Menghitung bound untuk simpul 7 (bersesuaian dengan sisi (1,2) pada graf):

Dari matriks D, ubah nilai pada baris ke-1 dan kolom ke-2 menjadi $\infty$, lalu reduksi lagi matriksnya

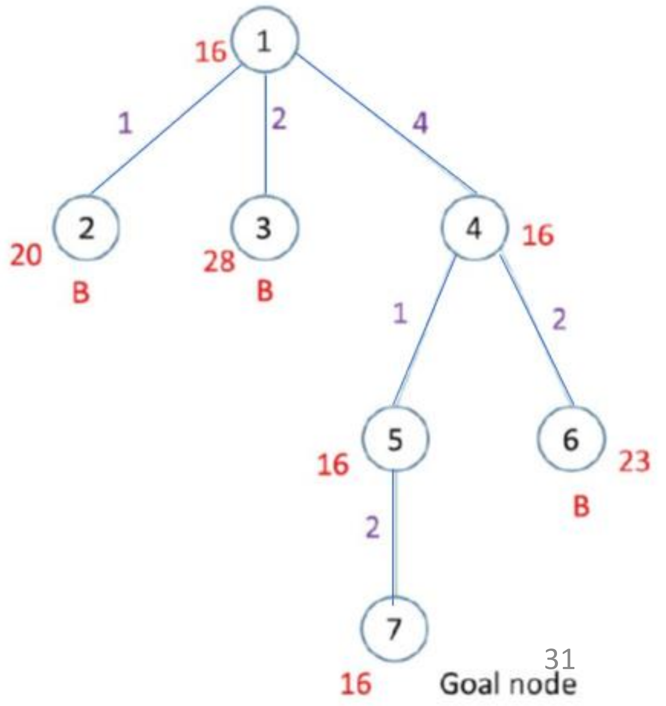
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \rightarrow \text{tidak perlu direduksi lagi}$$

Jumlah semua pengurang = r = o

Nilai bound untuk simpul 5 → c(7) = c(5) + D(1,2) + r = 16 + 0 + 0 = 16 →

Bunuh semua simpul dengan bound > 16. Habis.

Solusi X = (3, 4, 1, 2, 3) dengan total bobot = 16



BERSAMBUNG