Algoritma *Divide and Conquer*

(Bagian 2)

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB
2025

4. Pengurutan Secara *Divide and Conquer*

- Algoritma pengurutan secara *brute force*: algoritma *selection sort*, *bubble sort*, *insertion sort.*

- Ketiganya memiliki kompleksitas algoritma $O(n^2)$.

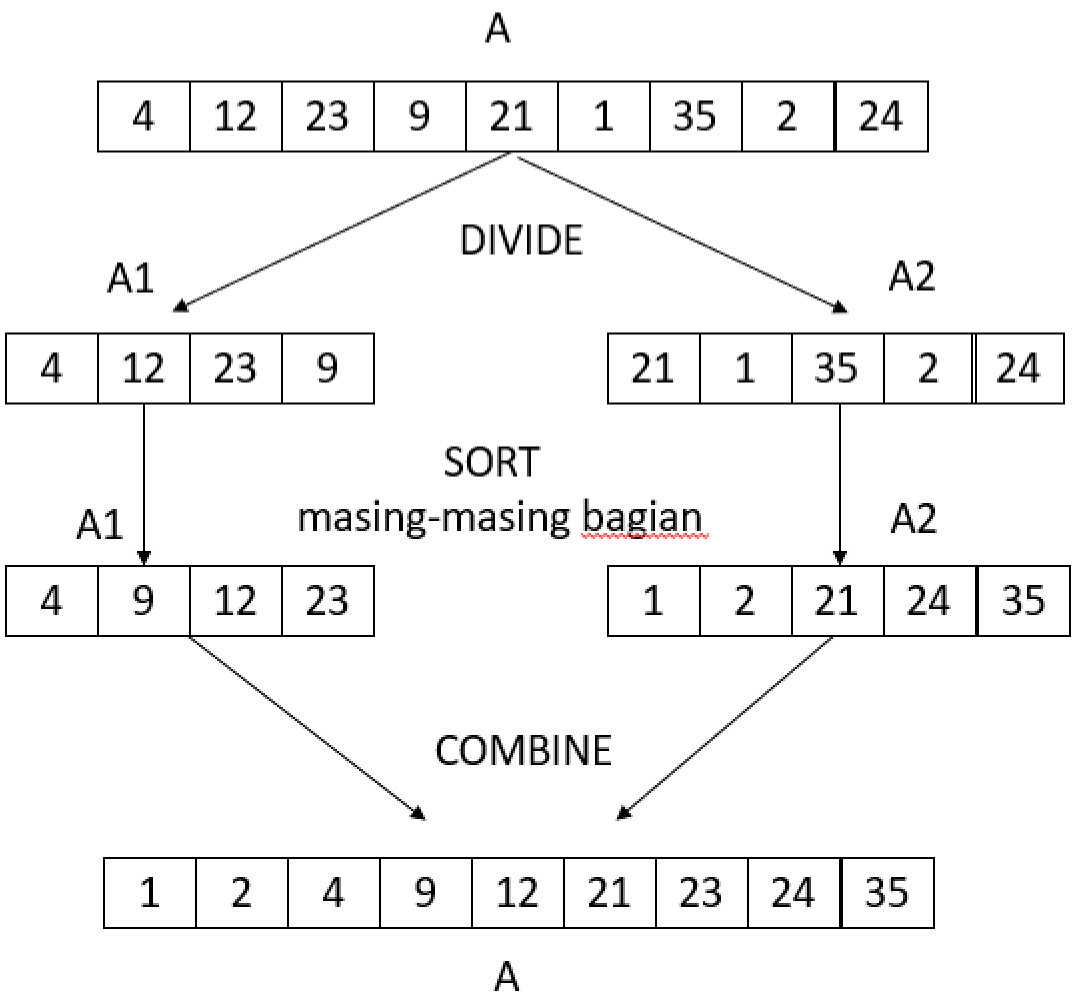
- Dengan metode *divide and conquer*, dapatkah dihasilkan algoritma pengurutan dengan kompleksitas lebih rendah dari n^2?

Ide pengurutan larik secara *divide and conquer*:

1. Jika ukuran larik = 1 elemen, larik sudah terurut dengan sendirinya.

2. Jika ukuran larik > 1, bagi larik menjadi dua bagian, lalu urut masing-masing bagian

3. Gabungkan hasil pengurutan masing-masing bagian menjadi sebuah larik yang terurut.



```
procedure  Sort(input/output  A : LarikInteger, input n : integer)
{ Mengurutkan larik A dengan metode Divide and Conquer
  Masukan: Larik A dengan n elemen
  Luaran: Larik A yang terurut
}
Algoritma:
   if   ukuran(A) > 1 then
         Bagi A menjadi dua bagian, A1 dan A2, masing-masing berukuran n1 dan n2 (n = n1 + n2)
         Sort(A1, n1)        { urut larik bagian kiri yang berukuran n1 elemen }
         Sort(A2, n2)        { urut larik bagian kanan yang berukuran n2 elemen }
         Combine(A1, A2, A)  { gabung hasil pengurutan bagian kiri dan  bagian kanan }
   end
```

Terdapat dua pendekatan melakukan pengurutan dengan *divide and conquer*:

1. Mudah membagi, tetapi sulit menggabung (*easy split*/*hard join*)
   - Pembagian larik menjadi dua bagian mudah secara komputasi
     (hanya membagi berdasarkan posisi atau indeks larik)
   - Penggabungan dua buah larik terurut menjadi sebuah larik terurut sulit secara komputasi (diukur dari kompleksitas algoritmanya)

2. Sulit membagi, tetapi mudah menggabung (*hard split*/*easy join*)
   - Pembagian larik menjadi dua bagian sukar secara komputasi
     (pembagiannya berdasarkan nilai elemen, bukan posisi elemen larik)
   - Penggabungan dua buah larik terurut menjadi sebuah larik terurut mudah dilakukan secara komputasi

Contoh: Misalkan larik A adalah sebagai berikut:

A	8	1	4	6	9	3	5	7

Dua pendekatan (*approach*) pengurutan:

1. Mudah membagi, sulit menggabung (*easy split/hard join*)
   Tabel *A* dibagidua berdasarkan posisi elemen:

Divide:	*A*1	8	1	4	6					*A*2	9	3	5	7
Sort:	*A*1	1	4	6	8					*A*2	3	5	7	9
Combine:	*A*1	1	3	4	5	6	7	8	9					

Algoritma pengurutan yang termasuk jenis ini: urut-gabung (*Merge Sort*)

2. Sulit membagi, mudah menggabung *(hard split/easy join)*

Tabel A dibagidua berdasarkan nilai elemennya. Misalkan elemen-elemen $A1 \leq$ elemen-elemen $A2$.

A

8	1	4	6	9	3	5	7

Divide: $A1$

5	1	4	3

$A2$

9	6	8	7

Sort: $A1$

1	3	4	5

$A2$

6	7	8	9

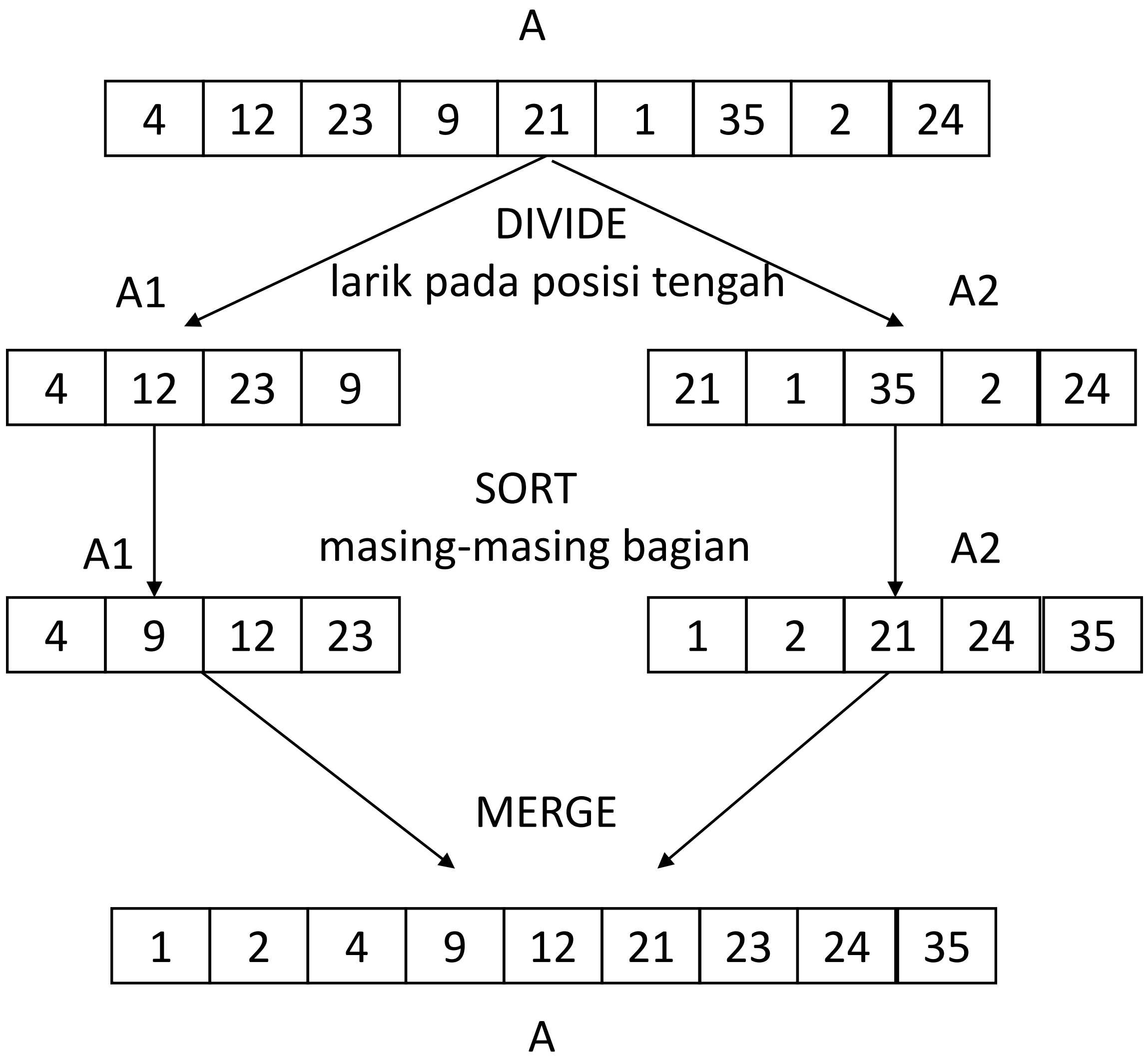
Combine: A

1	3	4	5	6	7	8	9

Algoritma pengurutan yang termasuk jenis ini: urut-cepat *(Quick Sort)*

4.1 *Merge Sort*

- Ide *merge sort*:



Pertanyaan:

1. Larik dibagi sampai ukurannya (n) tinggal berapa elemen?
2. Bagaimana menggabungkan dua larik terurut menjadi satu larik terurut?

Jawaban:

1. Sampai n = 1
2. Gunakan algoritma *merge*

Algoritma *Merge Sort* (A, n):

1. Jika *n* = 1, maka larik *A* sudah terurut dengan sendirinya (langkah SOLVE).

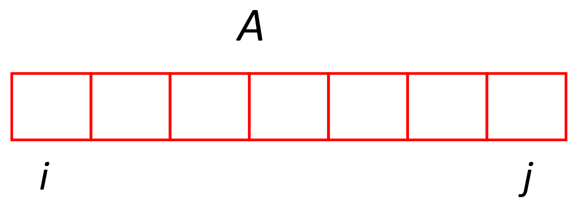
2. Jika *n* > 1, maka

   (a) DIVIDE: bagi larik *A* menjadi dua bagian pada posisi pertengahan, masing-masing bagian berukuran *n*/2 elemen.

   (b) CONQUER: secara rekursif, terapkan *Merge Sort* pada masing-masing bagian.

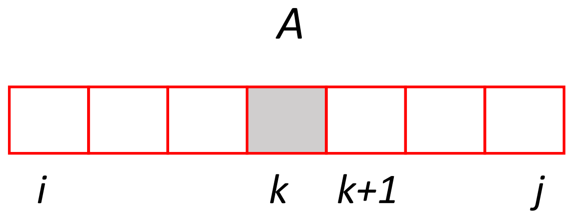
   (c) MERGE: gabung hasil pengurutan kedua bagian sehingga diperoleh larik *A* yang terurut.

- Dalam notasi *pseudo-code*:




```
procedure  MergeSort(input/output  A : LarikInteger, input i, j : integer)
{ Mengurutkan larik A[i..j] dengan algoritma Merge Sort.
  Masukan: Larik A[i..j] yang sudah terdefinisi elemen-elemennya
  Luaran: Larik A[i..j] yang terurut
}
Deklarasi
     k : integer

Algoritma:
  if  i  < j  then                { ukuran(A) > 1 }
       k ← (i + j) div 2          { bagi A pada posisi pertengahan }
       MergeSort(A, i, k)         { urut upalarik A[i..k] }
       MergeSort(A, k + 1, j)     { urut upalarik A[k+1, j] }
       Merge(A, i, k, j)          { gabung hasil pengurutan A[i..k] dan A[k+1..j] menjadi A[i..j] }
  end
```



Pemanggilan pertama kali: *MergeSort*(A, 1, n)

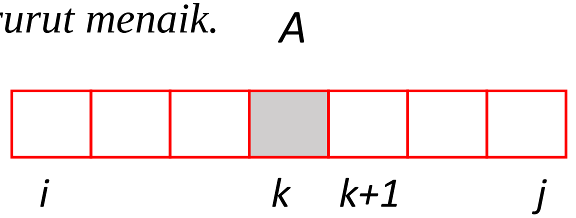
Contoh *Merge* dua larik terurut menjadi satu larik terurut:

*A*1			*A*2				*B*					
1	13	24	2	15	27	$1 < 2 \rightarrow 1$	1					
1	13	24	2	15	27	$2 < 13 \rightarrow 2$	1	2				
1	13	24	2	15	27	$13 < 15 \rightarrow 13$	1	2	13			
1	13	24	2	15	27	$15 < 24 \rightarrow 15$	1	2	13	15		
1	13	24	2	15	27	$24 < 27 \rightarrow 24$	1	2	13	15	24	
1	13	24	2	15	27	$27 \rightarrow$	1	2	13	15	24	27

```
procedure Merge(input/output A : LarikInteger, input i, k, j : integer)
{ Menggabung larikA[i..k] dan larik A[k+1..j] menjadi larik A[i..j] yang terurut menaik.
  Masukan: A[i..k] dan A[k+1..j] sudah terurut menaik.
  Luaran: A[k+1..j] yang terurut menaik.  }

Deklarasi
    B : LarikInteger        { larik temprorer untuk menyimpan hasil penggabungan }
    p, q, r : integer

Algoritma:
    p ← i                   { A[i .. k] }
    q ← k + 1               { A[k+1 .. j] }
    r ← i
    while (p ≤ k) and (q ≤ j) do
        if  A[p] ≤  A[q]  then
            B[r] ← A[p]         { salin elemen A[p] dari larik bagian kiri ke dalam larik B }
            p ← p + 1
        else
            B[r] ← A[q]         { salin elemen A[q] dari larik bagian kanan ke dalam larik B }
            q ← q + 1
        endif
        r ← r + 1
    endwhile
    { p  > k   or q  > j }
     …… continued
```

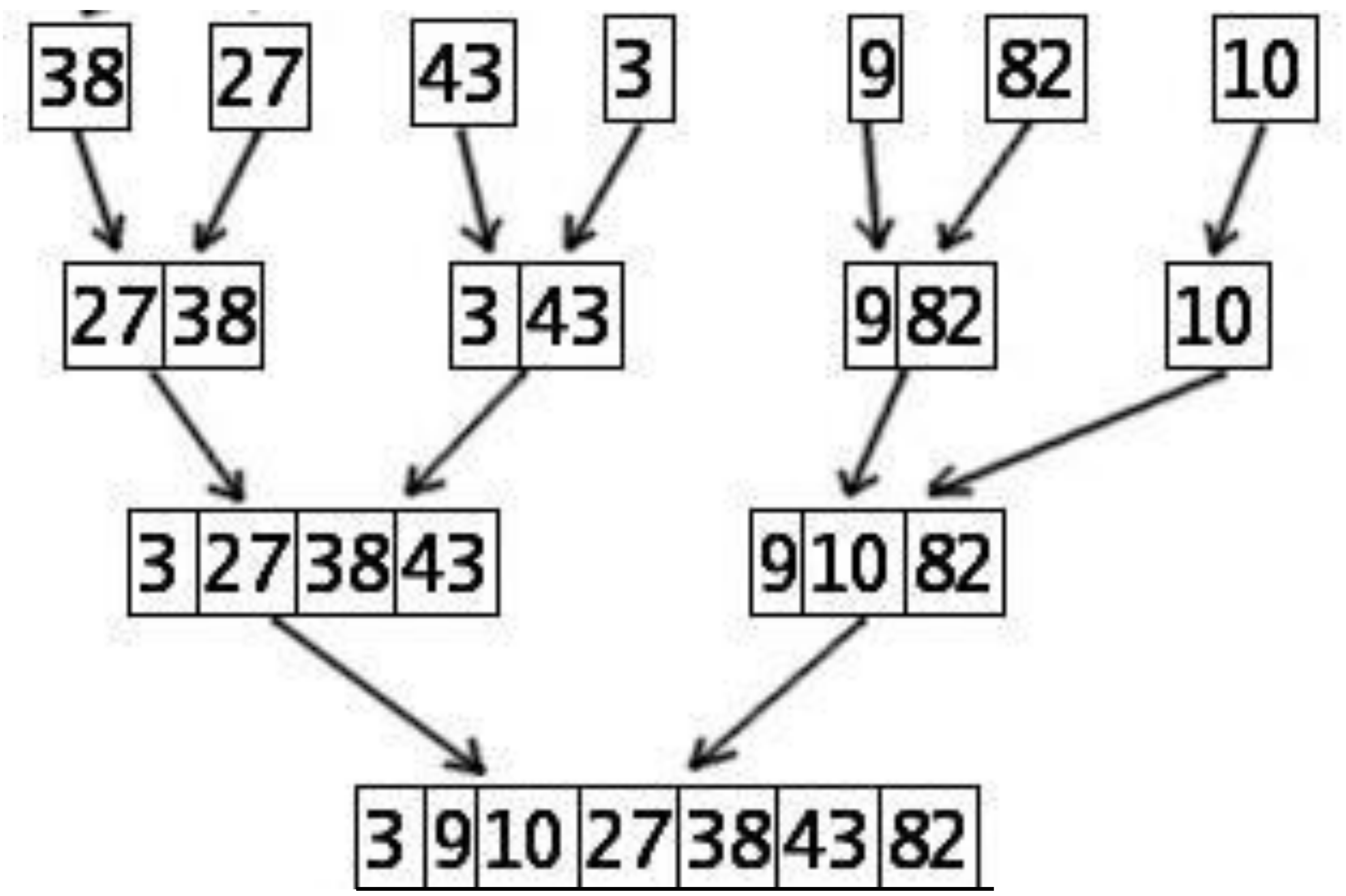


```
{ salin sisa larik A bagian kiri ke larik B, jika masih  ada }
 while (p  ≤  k) do
        B[r] ← A[p]
        p ← p + 1
        r ← r + 1
 endwhile
{ p  > k }

{ salin sisa larik A bagian kanan ke larik B, jika masih ada }
 while (q  ≤  j) do
        B[r] ← A[q]
        q ← q + 1
        r ← r + 1
 endwhile
 { q  > j }

{ salin kembali elemen-elemen larik B ke dalam A }
 for  r ← i  to  j  do
     A[r] ← B[r]
 endfor
{ diperoleh larik  A yang terurut membesar }
```

Contoh proses *merge* di dalam *Merge Sort*:

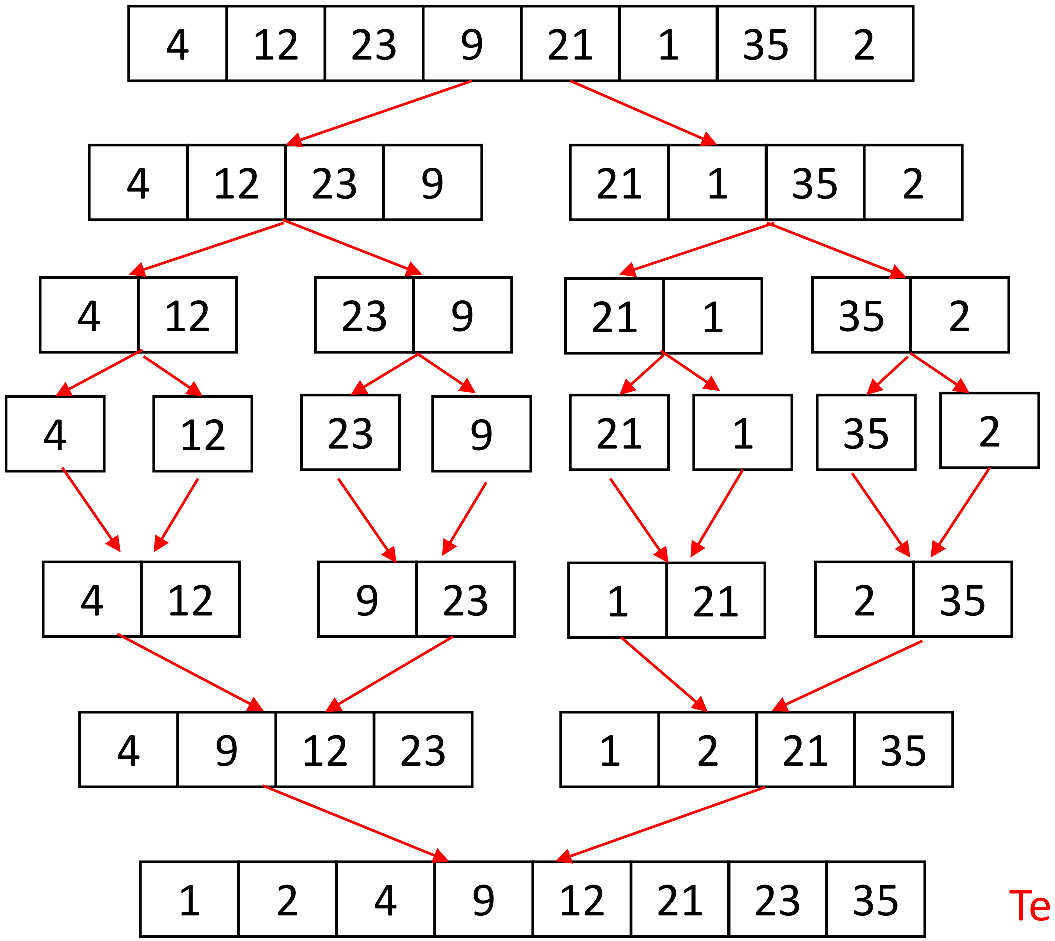


Contoh 4: Pengurutan larik A di bawah ini dengan *Merge Sort*

4	12	23	9	21	1	35	2

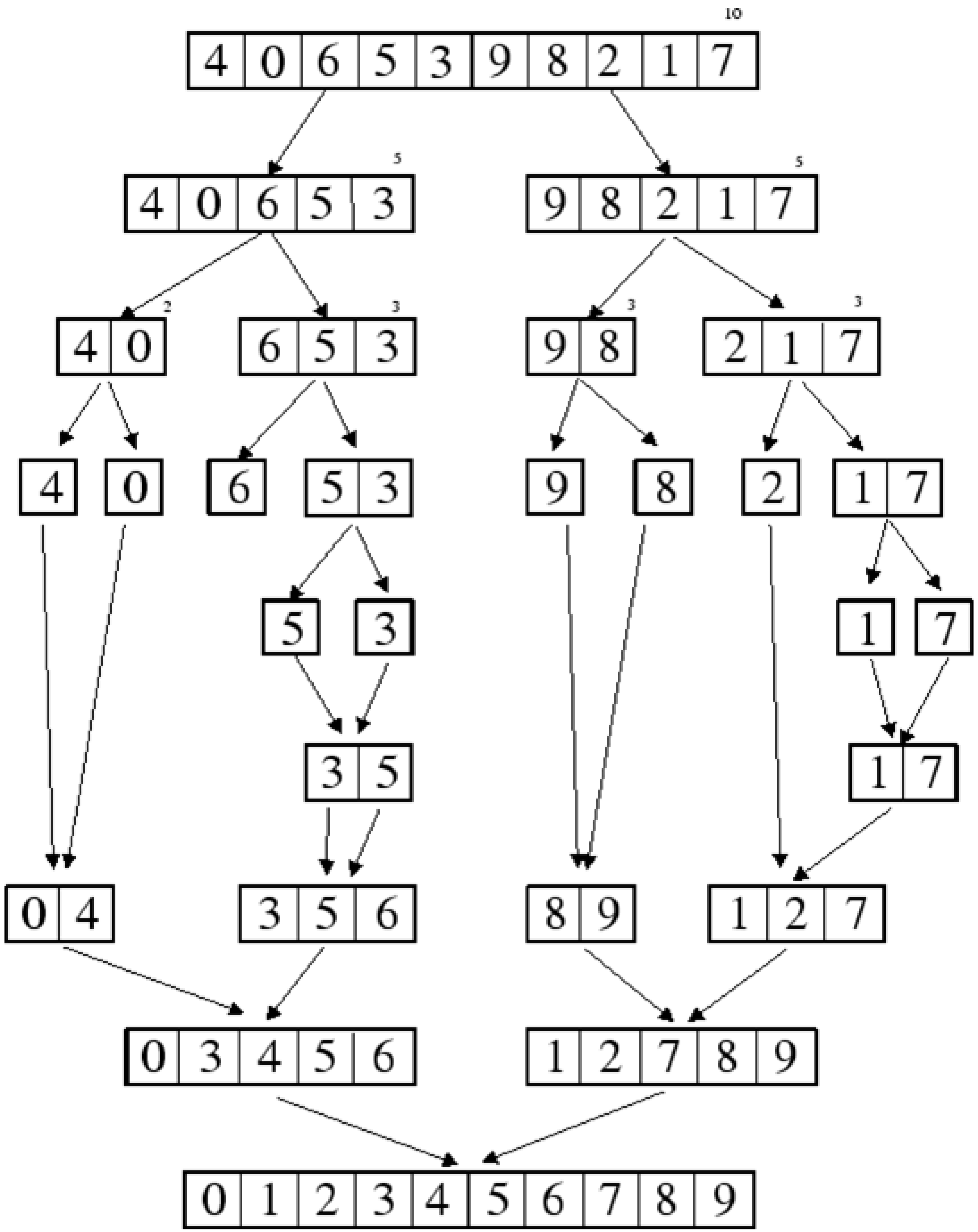
DIVIDE, CONQUER, dan SOLVE:

MERGE:



Terurut!

Contoh 5:


10
4 0 6 5 3 9 8 2 1 7
5
4 0 6 5 3
5
9 8 2 1 7
2
4 0
3
6 5 3
3
9 8
3
2 1 7
4
0
6
5 3
9
8
2
1 7
5
3
1
7
3 5
1 7
0 4
3 5 6
8 9
1 2 7
0 3 4 5 6
1 2 7 8 9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Kompleksitas waktu *Merge Sort*

- Kompleksitas algoritma *Merge Sort* diukur dari jumlah operasi perbandingan elemen-elemen larik.

- Jumlah perbandingan elemen-elemen larik di dalam prosedur *Merge* adalah *O*(*n*), yaitu berbanding lurus dengan jumlah elemen larik, atau *cn*, *c* konstanta.

- Jumlah perbandingan elemen-elemen larik seluruhnya:

  T(*n*) = *Mergesort* untuk pengurutan dua buah upalarik berukuran *n*/2 + jumlah perbandingan elemen di dalam prosedur *Merge*
  = 2*T*(*n*/2) + *cn*

- Sehingga: $$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & , n > 1 \end{cases}$$

- Penyelesaian persamaan rekursif secara iteratif :

  Untuk menyederhanakan perhitungan, asumsikan $n = 2^k$

  $$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + cn \\ &= 2(2T(n/4) + cn/2) + cn = 4T(n/4) + 2cn \\ &= 4(2T(n/8) + cn/4) + 2cn = 8T(n/8) + 3cn \\ &= \ldots \\ &= 2^k\,\mathrm{T}(n/2^k) + kcn \end{aligned}$$

  $$n = 2^k \rightarrow k = {}^2\log n$$

  sehingga

  $$T(n) = nT(1) + cn\,{}^2\log n = an + cn\,{}^2\log n = O(n\,{}^2\log n)$$

- Jadi, kompleksitas algoritma *Merge Sort* adalah $O(n\,{}^2\log n)$, lebih baik daripada kompleksitas algoritma pengurutan secara *brute force*.

4.2 *Quicksort*

- Algoritma pengurutan *Quicksort* merupakan algoritma pengurutan yang terkenal dan tercepat (sesuai namanya).

- *Quicksort* ditemukan oleh Tony Hoare tahun 1959 dan dipublikasikan tahun 1962.

- *Quicksort* merupakan algoritma pengurutan secara *divide and conquer*, dan termasuk ke dalam pendekatan sulit membagi, mudah menggabung *(hard split/easy join)*

- Di dalam *Quicksort*, larik *A* dibagidua (istilahnya: dipartisi) menjadi dua buah upalarik, *A*1 dan *A*2, sedemikian sehingga:

semua elemen di *A*1 $\leq$ semua elemen di *A*2.

A	8	1	4	6	9	3	5	7

Divide:	*A*1	5	1	4	3	*A*2	9	6	8	7
Sort:	*A*1	1	3	4	5	*A*2	6	7	8	9

Combine:	*A*	1	3	4	5	6	7	8	9

- Terdapat beberapa varian algoritma Quicksort. Versi orisinal adalah dari Hoare seperti di bawah ini:

Misalkan larik A akan diurut menaik (*ascending order*).

Teknik mempartisi larik menjadi dua bagian:

(i) pilih $x \in \{ A[1], A[2], ..., A[n] \}$ sebagai *pivot*,

(ii) pindai larik dari kiri sampai ditemukan elemen $A[p] \geq x$

(iii) pindai larik dari kanan sampai ditemukan elemen $A[q] \leq x$

(iv) pertukarkan $A[p] \Leftrightarrow A[q]$

(v) ulangi (ii), dari posisi $p + 1$, dan (iii), dari posisi $q - 1$, sampai kedua pemindaian bertemu di tengah larik ($p \geq q$)

Contoh 6. Misalkan larik A berisi elemen-elemen berikut:

8 1 4 6 9 3 5 7

Misalkan *pivot* = 6 (elemen tengah larik). Langkah-langkah partisi adalah sbb:

(i): 8 1 4 6 9 3 5 7

pivot

awal pindai $\rightarrow$ awal pindai $\leftarrow$

(ii) & (iii): 8 1 4 6 9 3 5 7

$\uparrow p$ $\uparrow q$

(iv): 5 1 4 6 9 3 8 7

$\uparrow$ $\uparrow$

tukar

		awal pindai $\rightarrow$				$\leftarrow$ awal pindai		
(ii) & (iii):	5	1	4	6	9	3	8	7
				$\uparrow p$		$\uparrow q$		

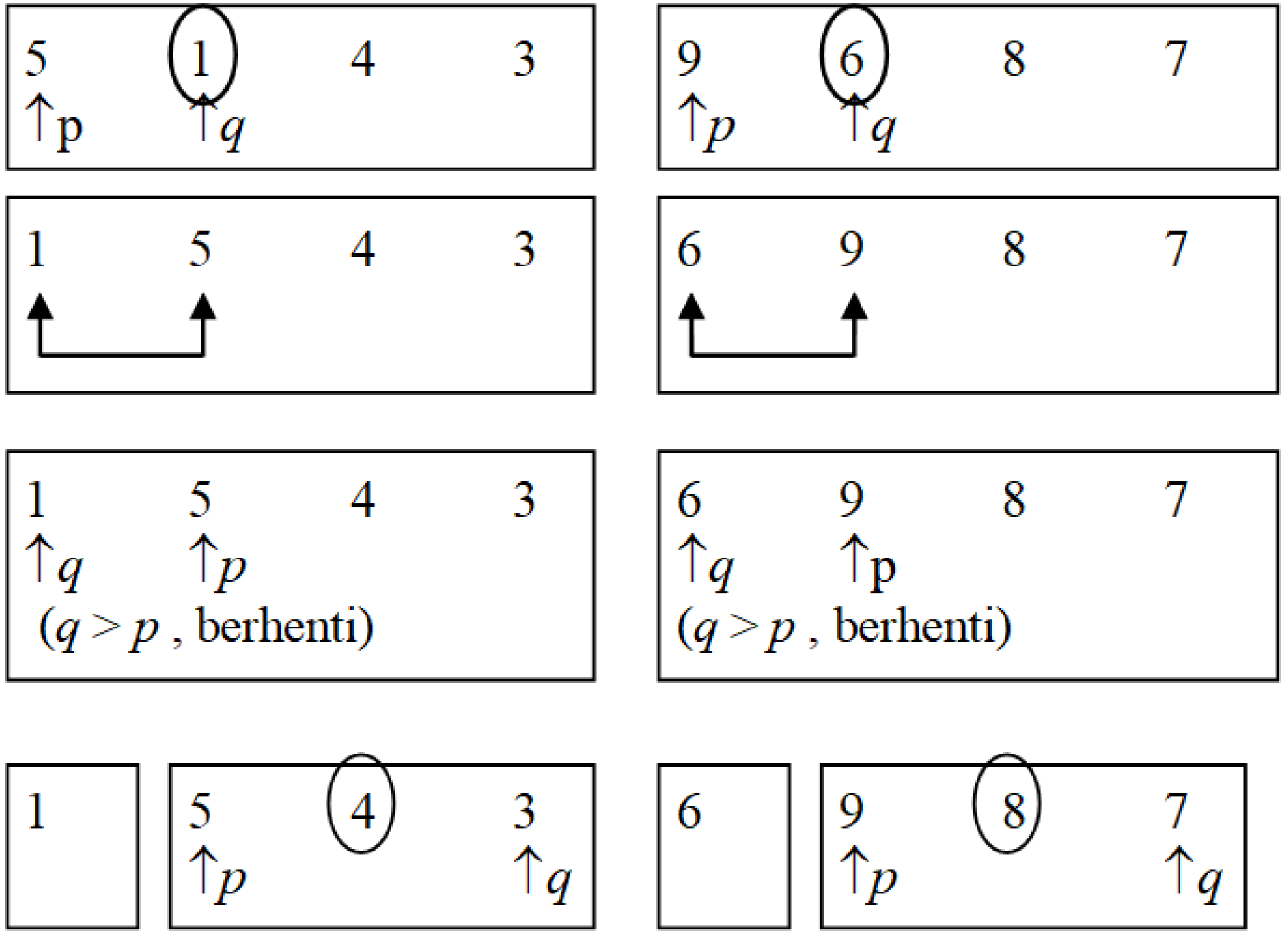
(iv):	5	1	4	3	9	6	8	7
				$\uparrow$	tukar	$\uparrow$		

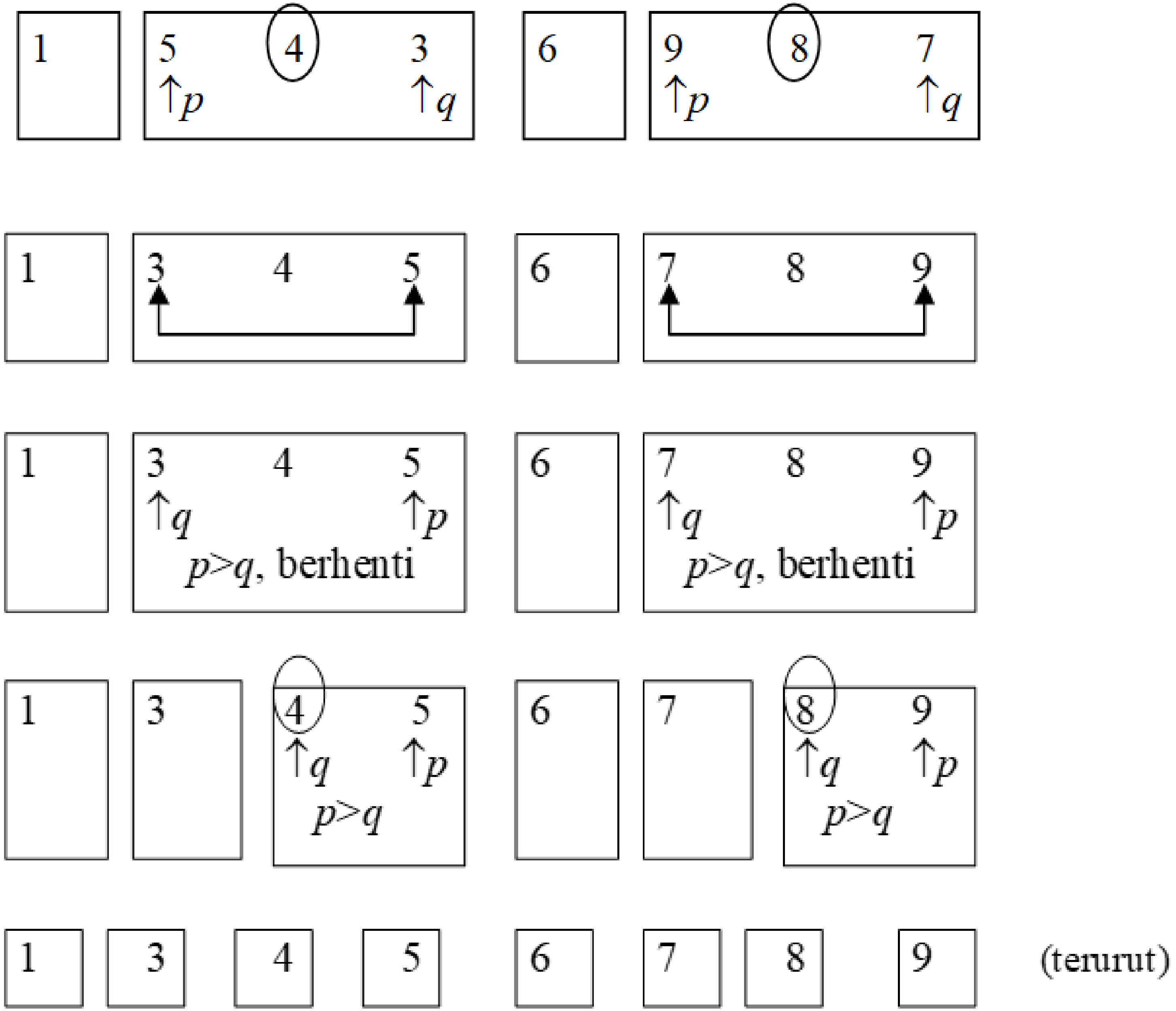
					$\leftarrow \rightarrow$			
(ii) & (iii):	5	1	4	3	9	6	8	7
				$\uparrow q$	$\uparrow p$	($q < p$, berhenti)		

Hasil partisi pertama:

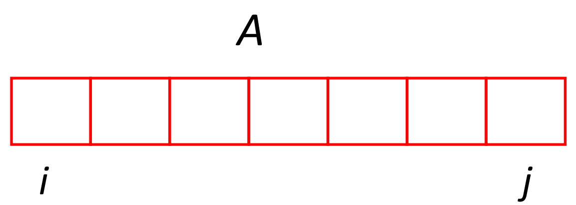
kiri:	5	1	4	3	(< 6)
kanan:	9	6	8	7	($\geq$ 6)

Teruskan partisi untuk setiap bagian sampai berukuran satu elemen:




1
5 4 3
↑p ↑q
6
9 8 7
↑p ↑q
1
3 4 5
6
7 8 9
1
3 4 5
↑q ↑p
p>q, berhenti
6
7 8 9
↑q ↑p
p>q, berhenti
1
3
4 5
↑q ↑p
p>q
6
7
8 9
↑q ↑p
p>q
1 3 4 5 6 7 8 9
(terurut)

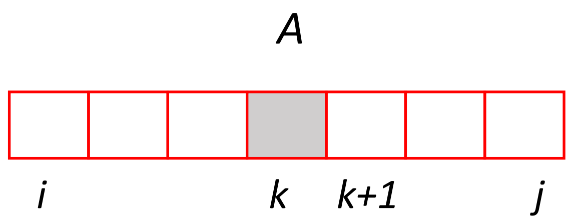
• *Pseudo-code* algoritma *Quicksort*:

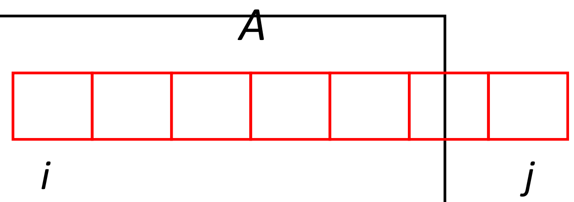



```
procedure QuickSort(input/output A : LarikInteger, input  i, j : integer)
{ Mengurutkan larik A[i..j] dengan algoritma Quicksort.
  Masukan: Larik A[i..j] yang sudah terdefinisi elemen-elemennya
  Luaran: Larik A[i..j] yang terurut
}

Deklarasi
   k : integer

Algoritma:
    if  i < j  then              { Ukuran(A) > 1 }
       Partisi(A, i, j, k)       { Larik dipartisi pada indeks k }
       QuickSort(A, i, k)        { Urut A[i..k] dengan Quick Sort }
       QuickSort(A, k+1, j)  { Urut A[k+1..j] dengan Quick Sort }
    endif
```






```
procedure Partisi(input/output A : LarikInteger, input i, j : integer, output q : integer)
 { Membagi larik A[i..j] menjadi upalarik A[i..q] dan A[q+1..j]
  Masukan: Larik A[i..j] udah terdefinisi harganya.
  Luaran: upalarik A[i..q] dan upalarik A[q+1..j] sedemikian sehingga A[i..q] lebih kecil dari larik A[q+1..j] }
Deklarasi
   pivot, temp : integer
Algoritma:
  pivot ← pilih sembarang elemen larik sebagai pivot, misalkan pivot = elemen tengah
  p ← i        {awal pemindaian dari kiri }
  q ← j        { awal pemindaian dari kanan }
  repeat
    while A[p] < pivot  do
        p ← p + 1
    endwhile
    { A[p] ≥ pivot}
     while  A[q] > pivot  do
        q ← q – 1
    endwhile
    { A[q] ≤ pivot}
     if  p  < q  then
       swap(A[p], A[q])     {pertukarkan A[p] dengan A[q] }
       p ← p + 1             {awal pemindaian berikutnya dari kiri }
       q ← q – 1            {awal pemindaian berikutnya dari kanan }
    endif
  until  p  ≥ q
```

Versi kedua *Quicksort*: Partisi sedemikian rupa sehingga elemen-elemen larik kiri $\leq$ pivot dan elemen-elemen larik kanan $\geq$ dari pivot.

$$\underbrace{a_{i_1} \cdots a_{i_{s-1}}}_{\leq p} \; p \; \underbrace{a_{i_{s+1}} \cdots a_{i_n}}_{\geq p}$$

p = pivot = elemen pertama.

Contoh:

pivot ↓

5, 3, 1, 9, 8, 2, 4, 7

pivot ↓

Partisi 2, 3, 1, 4, **5**, 8, 9, 7

semua $\leq$ pivot semua $\geq$ pivot

Contoh 7 (Levitin, 2003):

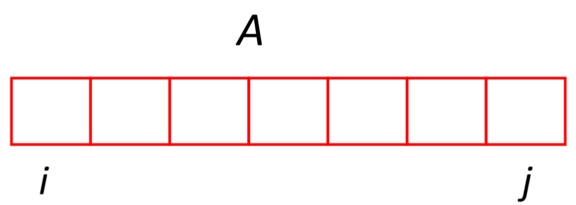
	→						←
5	3	1	9	8	2	4	7
			↑p			↑q	
5	3	1	4	8	2	9	7
				tukar			
5	3	1	4	8	2	9	7
				↑p	↑q		
5	3	1	4	2	8	9	7
5	3	1	4	2	8	9	7
				↑q	↑p	→ stop sebab $p > q$	
2	3	1	4	**5**	8	9	7
	tukar posisi pivot dengan $A[q]$						
2	3	1	4	**5**	8	9	7

	→		←			→	←
2	3	1	4		**8**	9	7
	↑p	↑q				↑p	↑q
2	1	3	4		**8**	7	9
2	1	3	4		**8**	7	9
	↑q	↑p				↑q	↑p
1	**2**	3	4		7	**8**	9
1		**3**	4		7		9
		↑q	↑p				
			4				

Terurut:

1 2 3 4 5 7 8 9

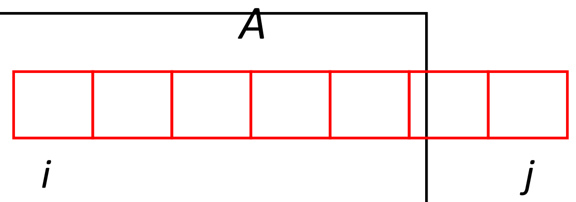
- *Pseudo-code* algoritma *Quicksort* versi 2:




```
procedure QuickSort2(input/output A : LarikInteger, input  i, j : integer)
{ Mengurutkan larik A[i..j] dengan algoritma Quicksort  versi 2
  Masukan: Larik A[i..j] yang sudah terdefinisi elemen-elemennya
  Luaran: Larik A[i..j] yang terurut
}

Deklarasi
   k : integer

Algoritma:
    if   i < j  then                  { Ukuran(A) > 1 }
         Partisi2(A, i, j, k)         { Larik dipartisi pada indeks k, partisi versi 2}
         QuickSort2(A, i, k – 1)      { Urut A[i..k – 1] dengan Quick Sort2 }
         QuickSort2(A, k+1, j)        { Urut A[k+1..j] dengan Quick Sor2t }
    endif
```




```
procedure Partisi2(input/output A : LarikInteger, input i, j : integer, output q : integer)
{ Membagi larik A[i..j] menjadi upalarik A[i..q-1] dan A[q+1..j]
  Masukan: Larik A[i..j] udah terdefinisi harganya.
  Luaran: upalarik A[i..q-1] dan upalarik A[q+1..j] sedemikian sehingga A[i..q-1] lebih kecil dari larik A[q+1..j] }
Deklarasi
   pivot, temp : integer
Algoritma:
  pivot ← A[i]        { pivot = elemen pertama }
  p ← i               {awal pemindaian dari kiri }
  q ← j + 1           { awal pemindaian dari kanan }
  repeat
    repeat
        p ← p + 1
    until A[p] >= pivot

    repeat
        q ← q – 1
    until A[q] <= pivot

    swap(A[p], A[q])     {pertukarkan A[p] dengan A[q] }

  until p ≥ q
  swap(A[p], A[q])   { undo last swap when p ≥ q }
  swap(A[i], A[q])   { pertukarkan pivot dengan A[q] }
```

- Cara pemilihan *pivot* (khusus pada *Quicksort* versi 1):

    1. *Pivot* = elemen pertama/elemen terakhir/elemen tengah larik

    2. *Pivot* dipilih secara acak dari salah satu elemen larik.

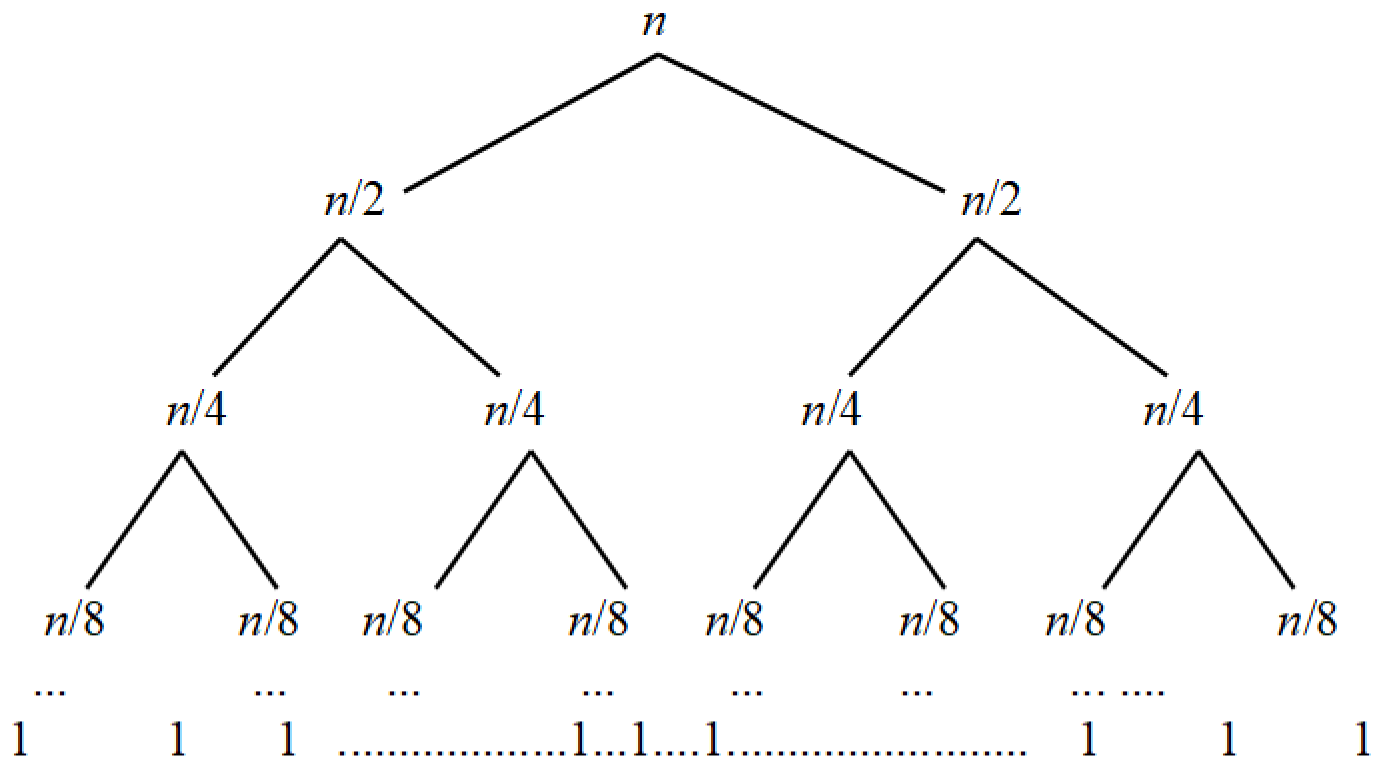
    3. *Pivot* = elemen median larik

- Cara pemilihan pivot menentukan kompleksitas algoritma *Quicksort*

Kompleksitas Algoritma *Quicksort*:

1. *Kasus terbaik (best case)*

- Kasus terbaik terjadi bila *pivot* adalah elemen median larik sehingga larik selalu terbagi menjadi dua upalarik yang berukuran relatif sama setiap kali proses partisi.



- Kompleksitas algoritma *Quicksort* untuk kasus terbaik:

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & , n > 1 \end{cases}$$

Penyelesaiannya sama seperti pada *Merge Sort*:

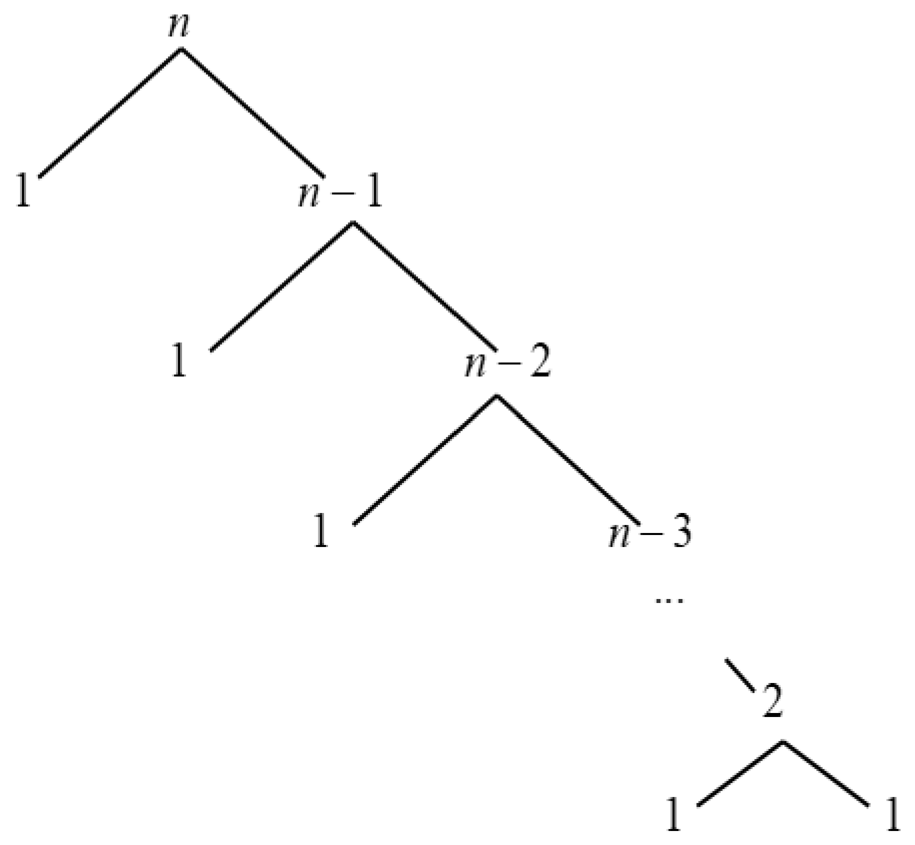
$$T(n) = 2T(n/2) + cn = na + \mathrm{cn}\ {}^2\log n = O(n\ {}^2\log n).$$

- Kasus terbaik menghasilkan kompleksitas algoritma *Quicksort* yang lebih baik daripada algoritma pengurutan secara *brute force.*

2. *Kasus terburuk (worst case)*

- Kasus ini terjadi bila pada awalnya larik sudah terurut (menaik atau menurun), dan *pivot* selalu elemen pertama larik (elemen pertama merupakan elemen maksimum atau elemen minimum larik).

- Akibatnya, proses partisi menghasilkan ketidakseimbangan ukuran, upalarik pertama berukuran satu elemen, upalarik kedua berukuran *n* – 1 elemen.



- Kompleksitas algoritma *Quicksort* untuk kasus terburuk:

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ T(n-1) + cn & ,n > 1 \end{cases}$$

- Penyelesaian relasi rekursif di atas adalah pada halaman berikut

Kompleksitas waktu *Quicksort* kasus terburuk:

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ T(n-1) + cn & , n > 1 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$T(n) = cn + T(n - 1)$
$= cn + \{ c(n - 1) + T(n - 2) \}$
$= cn + c(n - 1) + \{ c(n - 2) + T(n - 3) \}$
$= cn + c(n - 1) + c(n - 2) + \{c(n - 3) + T(n - 4) \}$
$= ...$
$= cn + c(n - 1) + c(n - 2) + c(n - 3) + ... + c2 + T(1)$
$= c\{ n + (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + ... + 2 \} + a$
$= c\{ (n - 1)(n + 2)/2 \} + a$
$= cn^2/2 + cn/2 + (a - c)$
$= O(n^2) \rightarrow$ sama seperti komplesitas algoritma *sorting* secara *brute force*

3. *Kasus rata-rata (average case)*

- Kasus ini terjadi jika *pivot* dipilih secara acak dari elemen-elemen larik, dan peluang setiap elemen dipilih menjadi *pivot* adalah sama.

- Kompleksitas algoritma *Quicksort* untuk kasus rata-rata:

$$T_{avg}(n) = O(n\ ^2\log n).$$

5. Teorema Master

- Teorema Master dapat digunakan untuk menentukan notasi asimptotik kompleksitas waktu yang berbentuk relasi rekurens dengan mudah tanpa harus menyelesaikannya secara iteratif.

- Misalkan $T(n)$ adalah fungsi monoton menaik yang memenuhi relasi rekurens:

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

yang dalam hal ini $n = b^k$, $k = 1, 2, \ldots$, $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 0$ dan $d \geq 0$, maka

$$T(n) \text{ adalah } \begin{cases} O(n^d) & \text{jika } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{jika } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{jika } a > b^d \end{cases}$$

Contoh 10. Misalkan sebuah algoritma memiliki kompleksitas waktu sebagai berikut:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ T\left(\frac{n}{2}\right) + 4, & n > 1 \end{cases}$$

Tentukan estimasi notasi Big-Oh nya.

Jawaban:

Perhatikan rekasi rekurens T(n) = T(n/2) + 4. Dari Teorema Master, $T(n) = aT(n/b) + cn^d$, maka a = 1, b = 2, c = 4, dan d = 0, sehingga memenuhi $a = b^d = 1$ (yaitu $1 = 2^0$).

maka relasi rekurens

$T(n) = T(n/2) + 4$

memenuhi *case* 2 (jika $a = b^d$)

$$\begin{cases} O(n^d) & \text{jika } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{jika } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{jika } a > b^d \end{cases}$$

Case 1
Case 2
Case 3

sehingga

$T(n) = O(n^0 \log n) = O(\log n)$

Contoh 11. Misalkan sebuah algoritma memiliki kompleksitas waktu sebagai berikut:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 7T\left(\frac{n}{5}\right) + 9n^2, & n > 1 \end{cases}$$

Tentukan estimasi notasi Big-Oh nya.

Jawaban:

Perhatikan rekasi rekurens T(n) = 7T(n/5) + $9n^2$. Dari Teorema Master, $T(n) = aT(n/b) + cn^d$, maka a = 7, b = 5, c = 9, dan d = 2, sehingga memenuhi $a < b^d$ (yaitu $7 < 5^2$).

maka relasi rekurens

$$T(n) = 7T(n/5) + 9n^2$$

memenuhi *case* 1 (jika $a < b^d$)

$$\begin{cases} O(n^d) & \text{jika } a < b^d \quad \text{Case 1} \\ O(n^d \log n) & \text{jika } a = b^d \quad \text{Case 2} \\ O(n^{\log_b a}) & \text{jika } a > b^d \quad \text{Case 3} \end{cases}$$

sehingga

$$T(n) = O(n^2)$$

Contoh 12: Pada algoritma *Mergesort/Quick Sort*,

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & , n > 1 \end{cases}$$

Menurut Teorema Master, $T(n) = aT(n/b) + cn^d$, diperoleh $a = 2$, $b = 2$, $d = 1$, dan memenuhi $a = b^d$ (yaitu $2 = 2^1$) maka relasi rekurens:

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

memenuhi *case* 2 (jika $a = b^d$)

$$\begin{cases} O(n^d) & \text{jika } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{jika } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{jika } a > b^d \end{cases}$$

Case 1

Case 2

Case 3

sehingga

$$T(n) = O(n \log n)$$

Catatan: basis logaritma tidak penting di dalam notasi Big-O, sebab fungsi logaritma tumbuh pada laju yang sama untuk sembarang basis.

Contoh 13: Pada algoritma perpangkatan a^n,

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ T\left(\frac{n}{2}\right) + 1, & n > 0 \end{cases}$$

Menurut Teorema Master, $T(n) = aT(n/b) + cn^d$, diperoleh $a = 1$, $b = 2$, $d = 0$, dan memenuhi $a = b^d$ (yaitu $1 = 2^0$) maka relasi rekurens:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

memenuhi *case* 2 (jika $a = b^d$)

$$\begin{cases} O(n^d) & \text{jika } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{jika } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{jika } a > b^d \end{cases}$$

Case 1
Case 2
Case 3

sehingga

$$T(n) = O(n^0 \log n) = (\log n)$$

Contoh 14. Misalkan sebuah algoritma memiliki kompleksitas waktu sebagai berikut:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 2 \\ 2T(\sqrt{n}) + 1, & n > 2 \end{cases}$$

Diasumsikan n adalah perpangkatan dari 2, atau n = 2^m. Tentukan estimasi notasi Big-Oh nya.

Jawaban:

Misalkan n = 2^m, maka m = ${}^2\log n$

Maka, $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1 \rightarrow$ T(2^m) = 2T($(2^m)^{1/2}$) + 1 $\rightarrow$ T(2^m) = 2 T($2^{m/2}$) + 1

Misalkan S(m) = T(2^m), maka S(m) = 2S(m/2) + 1. Dari teorema master, a = 2, b = 2, c = 1, d = 0, sehingga 2 > 2^0 (case 3),

S(m) adalah O($m^{{}^2\log 2}$) = O(m).

Karena n = 2^m, maka m = ${}^2\log$ n.

Jadi, T(n) adalah O(log n)

$$\begin{cases} O(n^d) & \text{jika } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{jika } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{jika } a > b^d \end{cases}$$

Case 1

Case 2

Case 3

Latihan Soal Divide and Conquer

(Soal UTS 2011) Misalkan anda mempunyai larik $A[1..n]$ yang telah berisi n elemen *integer*. *Elemen mayoritas* di dalam *A* adalah elemen yang muncul lebih dari $n/2$ kali (jadi, jika $n = 6$ atau $n = 7$, elemen mayoritas terdapat paling sedikit 4 kali).

Rancanglah algoritma *divide and conquer* (tidak dalam bentuk *pseudo-code*, tapi dalam bentuk uraian deskriptif) untuk menemukan elemen mayoritas di dalam *A* (atau menentukan tidak terdapat elemen mayoritas).

Jelaskan algoritma anda dengan contoh sebuah larik berukuran 8 elemen. Selanjutnya, perkirakan kompleksitas algoritmanya dalam hubungan rekursif (misalnya $T(n) = bT(n/p) + h(n)$), lalu selesaikan $T(n)$ tersebut.

Jawaban:

1. Jika n = 1, maka elemen tunggal tersebut adalah mayoritasnya sendiri.
2. Jika n > 1, maka bagi larik menjadi dua bagian (kiri dan kanan) yang masing-masing berukuran sama (n/2), lalu cari mayoritas pada setiap bagian (CONQUER)
3. Tahap *combine.* Ada empat kemungkinan kasus:

   <u>Kasus 1</u>: tidak ada mayoritas pada setiap bagian, sehingga larik gabungan keduanya tidak memiliki mayoritas.

   Return: "no majority"

   Contoh: 4 3 4 2 7 5 2 1

   4 3 4 2 | 7 5 2 1

   no majority | no majority

   Ingat definisi mayoritas!

   4 3 4 2 7 5 2 1

   "no majority"

Kasus 2: bagian kanan memiliki mayoritas, bagian kiri tidak. Pada larik gabungan, hitung kemunculan elemen mayoritas bagian kanan tersebut;

Jika elemen tersebut mayoritas pada larik gabungan, *return* elemen tersebut, kalau tidak *return* "no majority"

Contoh: 4 3 4 2 7 4 4 4

4 3 4 2 | 7 4 4 4

Ingat definisi mayoritas!

no majority | majority = 4

4 3 4 2 7 4 4 4

Jumlah elemen 4 = 5 buah → mayoritas

Ingat definisi mayoritas!

"majority = 4"

Contoh lain (tidak ada mayoritas):

4 3 5 2 7 4 4 4

4 3 5 2   7 4 4 4

no majority   majority = 4

4 3 5 2 7 4 4 4

Jumlah elemen 4 = 4 buah → bukan mayoritas

“no majority”

Kasus 3: bagian kiri memiliki mayoritas, bagian kanan tidak. Pada larik gabungan, hitung jumlah kemunculan elemen mayoritas bagian kiri tersebut.

Jika elemen tersebut mayoritas pada larik gabungan, *return* elemen tersebut, kalau tidak *return* "no majority"

Contoh: 3 3 4 3 7 3 3 4

3 3 4 3 7 3 3 4

majority = 3 no majority

3 3 4 3 7 3 3 4

Jumlah elemen 3 = 5 buah → mayoritas

"majority = 3"

Kasus 4: bagian kiri dan bagian kanan memiliki mayoritas, Pada larik gabungan, hitung jumlah kemunculan kedua elemen kandidat mayoritas tersebut.

Jika salah satu kandidat adalah elemen mayoritas, *return* elemen tersebut, kalau tidak *return* “no majority”

Contoh: 3 3 4 3 4 4 4 4

3 3 4 3 4 4 4 4

majority = 3 majority = 4

3 3 4 3 4 4 4 4

Jumlah elemen 3 = 3 buah

Jumlah elemen 4 = 5 buah → mayoritas

“majority = 4”

Contoh keseluruhan:

4 3 4 4 4 5 4 3

4 3 4 4 | 4 5 4 3

4 3 | 4 4 | 4 5 | 4 3

4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 3

divide (sekaligus conquer)

4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 3

m=4 m=3 m=4 m=4 m=4 m=5 m=4 m=3

solve

4 3 4 4 4 5 4 3

m=4 m=3 m=4 m=4 m=4 m=5 m=4 m=3

4 3 | 4 4 | 4 5 | 4 3

nm | m =4 | nm | nm

4 3 4 4 | 4 5 4 3

m = 4 | nm

4 3 4 4 4 5 4 3

m = 4

combine

Kompleksitas waktu algoritma mayoritas:

$T(n)$ = jumlah operasi perbandingan elemen yang terjadi

(pada saat menghitung jumlah elemen yang sama dengan kandidat mayoritas)

Untuk $n = 1$, jumlah perbandingan = 0, secara umum = a.

Pada $n > 1$, terdapat dua pemanggilan rekursif, masing-masing untuk $n/2$ elemen larik.

Jumlah perbandingan elemen yang terjadi paling banyak $2n$ (*upper bound*) yaitu pada kasus 4, untuk *array* berukuran n. Secara umum jumlah perbandingan = cn.

Jadi,

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & , n > 1 \end{cases}$$

Bila diselesaikan dengan Teorema Master, $T(n) = aT(n/b) + cn^d$, diperoleh $a = 2$, $b = 2$, $d = 1$, dan memenuhi $a = b^d$ (yaitu $2 = 2^1$) maka relasi rekurens

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

memenuhi *case* 2 (jika $a = b^d$)

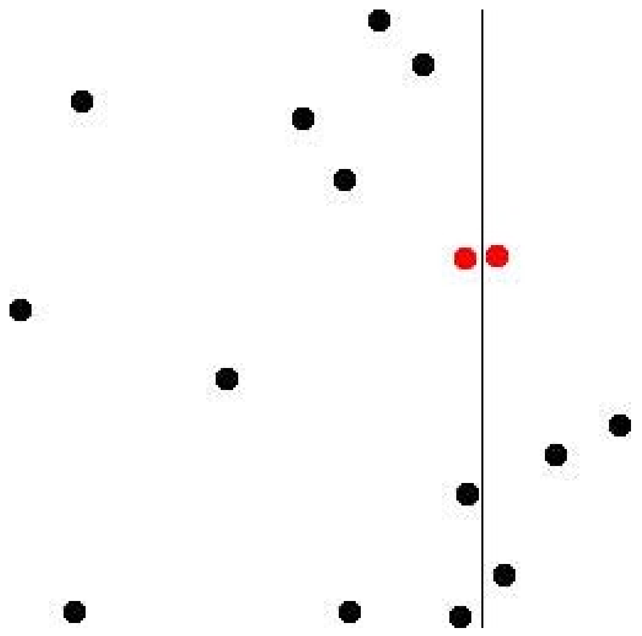
$$\begin{cases} O(n^d) & \text{jika } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{jika } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{jika } a > b^d \end{cases}$$

sehingga

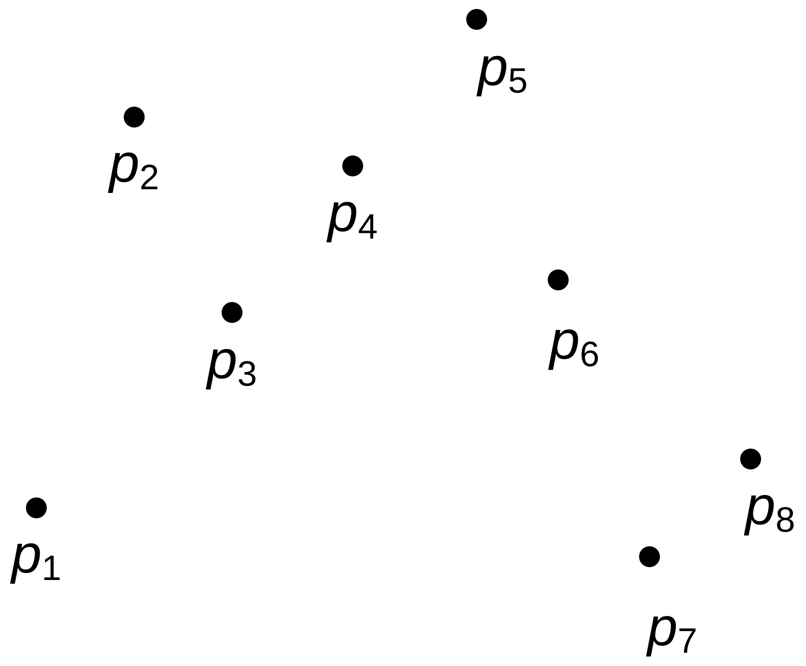
$$T(n) = O(n^1 \log n) = O(n \log n)$$

6. Mencari Pasangan Titik Terdekat (*Closest Pair*)

Persoalan: Diberikan himpunan titik, *P*, yang terdiri dari *n* buah titik pada bidang 2-D, (x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n. Tentukan sepasang titik di dalam P yang jaraknya terdekat satu sama lain.



$n = 8$



Jarak dua buah titik $p_1 = (x_1, y_1)$ dan $p_2 = (x_2, y_2)$ dihitung dengan rumus Euclidean:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Penyelesaian secara *Brute Force*

- Hitung jarak setiap pasang titik. Terdapat sebanyak $C(n, 2) = n(n - 1)/2$ pasangan titik yang harus dihitung jaraknya. (C = notasi kombinasi)

- Pilih pasangan titik yang mempunyai jarak terkecil sebagai solusinya.

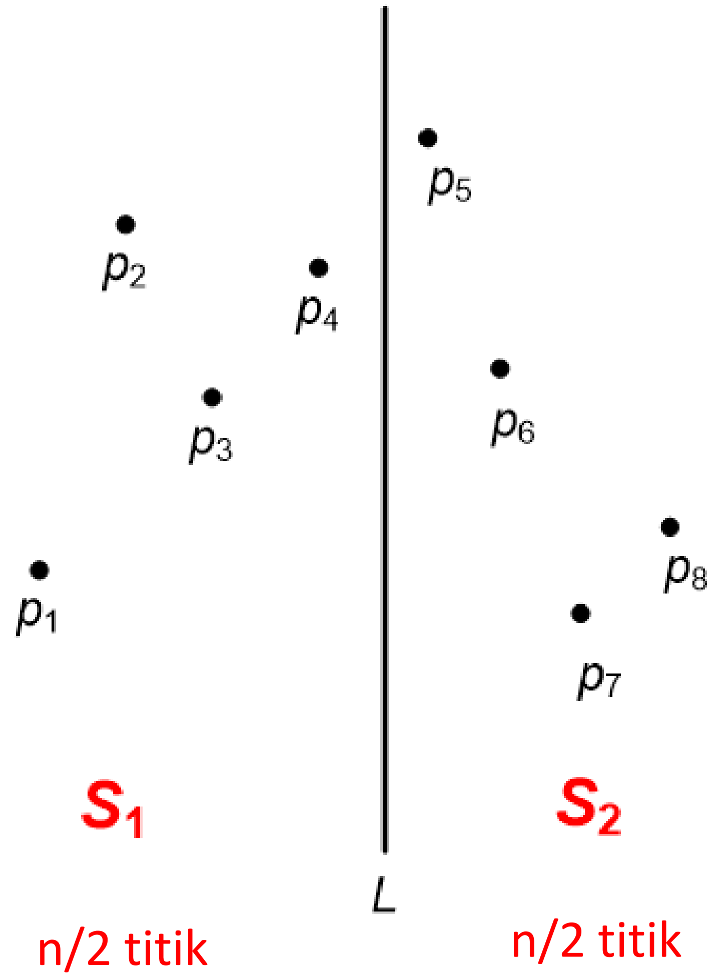
- Kompleksitas algoritma adalah $O(n^2)$.

Penyelesaian secara *Divide and Conquer*

- Asumsi: $n = 2^k$ (jumlah titik adalah perpangkatan dari dua)
- Praproses: titik-titik di dalam P diurut menaik berdasarkan nilai absisnya (x).

- Algoritma *Closest Pair*:
  1. SOLVE: jika n = 2, maka jarak kedua titik dihitung langsung dengan rumus Euclidean.

2. DIVIDE: Bagi himpunan titik ke dalam dua bagian, S_1 dan S_2, setiap bagian mempunyai jumlah titik yang sama. L adalah garis maya yang membagi dua himpunan titik ke dalam dua sub-himpunan, masing-masing $n/2$ titik.

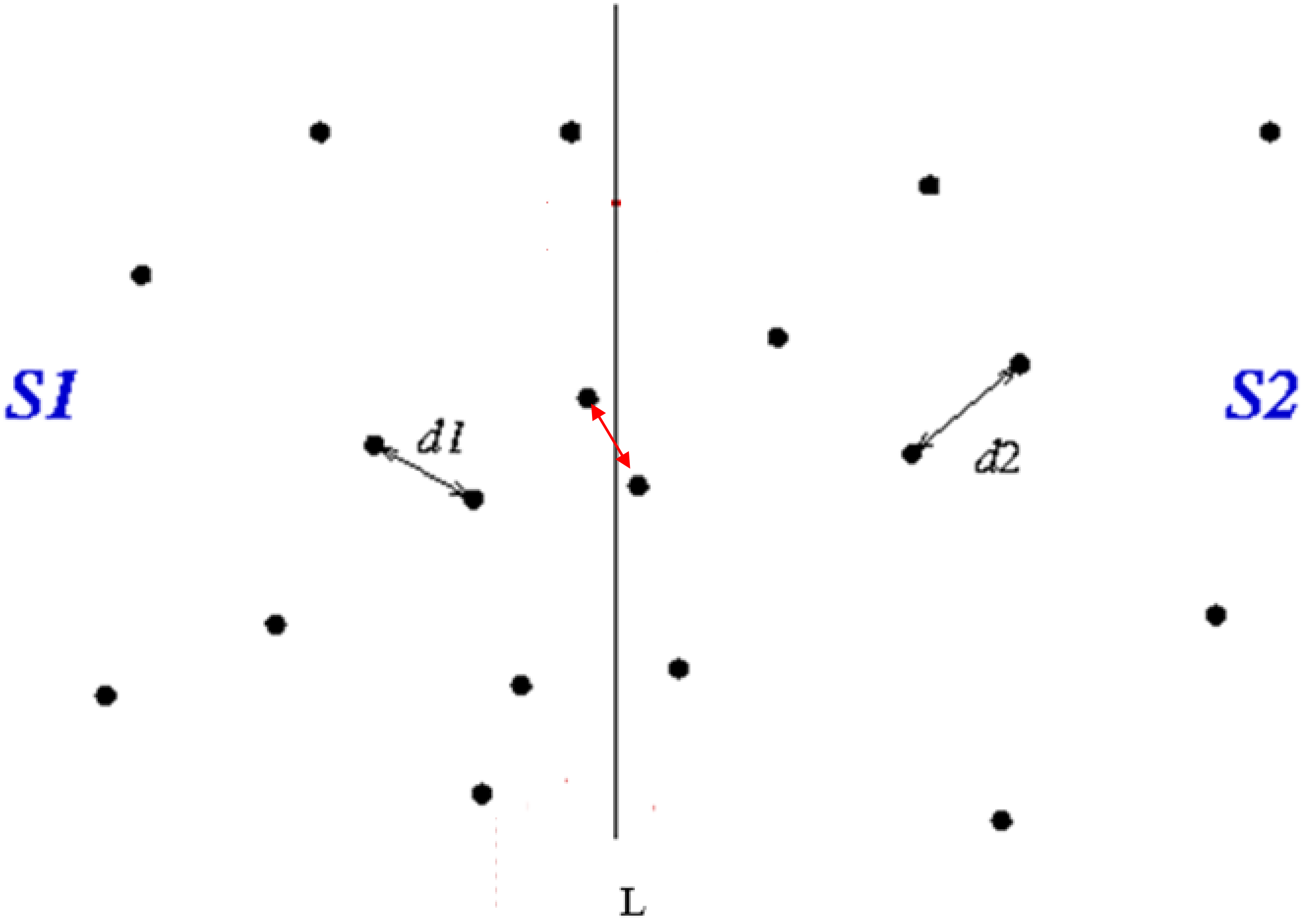


Garis maya L dapat dihampiri sebagai $y = x_{n/2}$ (ingatlah titik-titik sudah diurut menaik berdasarkan absis (x)).

3. CONQUER: Secara rekursif, terapkan algoritma *D-and-C* pada masing-masing bagian untuk mencari sepasang titik terdekat.

4. COMBINE: Pasangan titik yang jaraknya terdekat ada tiga kemungkinan letaknya:
   (a) Pasangan titik terdekat terdapat di dalam bagian S_1.
   (b) Pasangan titik terdekat terdapat di dalam bagian S_2.
   (c) Pasangan titik terdekat dipisahkan oleh garis batas L, yaitu satu titik di S_1 dan satu titik di S_2.

   Jika kasusnya adalah (c), maka lakukan tahap ketiga (akan dijelaskan kemudian) untuk mendapatkan jarak dua titik terdekat sebagai solusi persoalan semula.


S1
d1
S2
d2
L

procedure *FindClosestPair*(**input** *P* : *SetOfPoint*, *n* : **integer**, **output** *d* : **real**)
{ Mencari jarak terdekat sepasang titik di dalam himpunan P
Masukan: P = $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, titik-titik di dalam P sudah terurut menaik berdasarkan absisnya (x)
Luaran: d adalah jarak sepasang titik terdekat }

Deklarasi:
d1, *d2* : **real**

Algoritma:
if $n = 2$ **then**
  $d \leftarrow$ jarak kedua titik dengan rumus Euclidean
else
  $S1 \leftarrow \{p_1, p_2, ..., p_{n/2}\}$
  $S2 \leftarrow \{p_{n/2+1}, p_{n/2+2}, ..., p_n\}$
  FindClosestPair(*S1*, *n*/2, *d1*)
  FindClosestPair(*S2*, *n*/2, *d2*)
  $d \leftarrow$ MIN(*d1*, *d2*) *{ bandingkan dulu d1 dengan d2 untuk menentukan yang terkecil }*
  {***}
  Tentukan apakah terdapat titik p_{left} di *S1* dan p_{right} di *S2* dengan jarak(p_{left}, p_{right}) $< d$. Jika ada, maka set *d* dengan jarak terkecil tersebut.
  {***}
endif

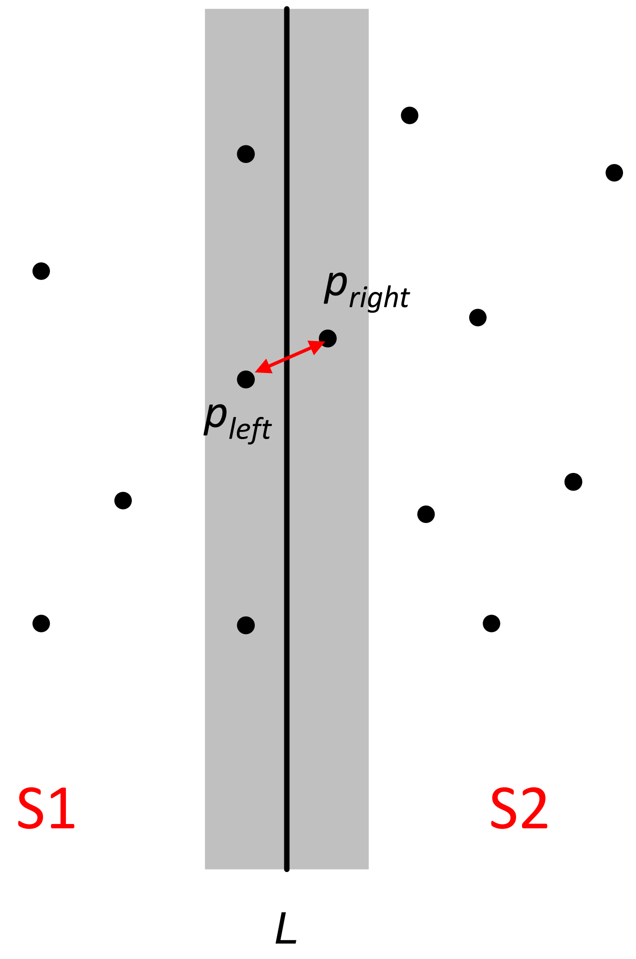
- Jika terdapat pasangan titik p_{left} and p_{right} yang jaraknya lebih kecil dari d, maka kasusnya adalah:

  (i) Absis x dari p_{left} dan p_{right} berbeda paling banyak sebesar d.

  (ii) Ordinat y dari p_{left} dan p_{right} berbeda paling banyak sebesar d.

- Ini berarti p_{left} and p_{right} adalah sepasang titik yang berada di daerah sekitar garis vertikal L (daerah abu-abu)

- Berapa lebar strip abu-abu tersebut?



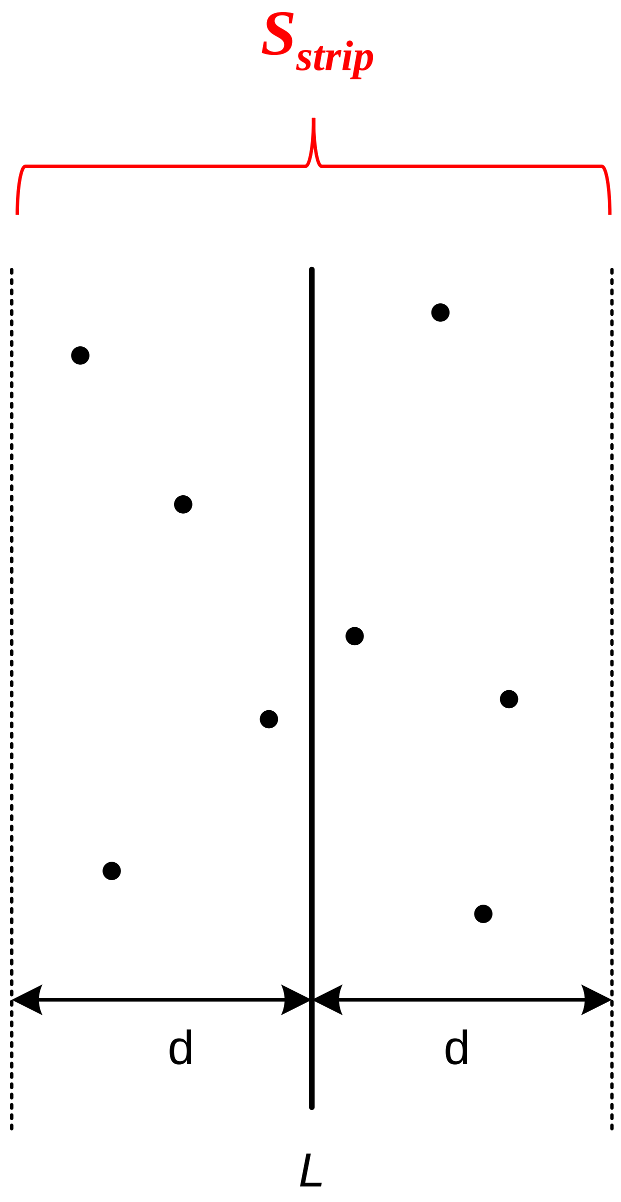
- Kita membatasi titik-titik di dalam *strip* selebar 2*d*

- Oleh karena itu, implementasi tahap ketiga adalah sbb:

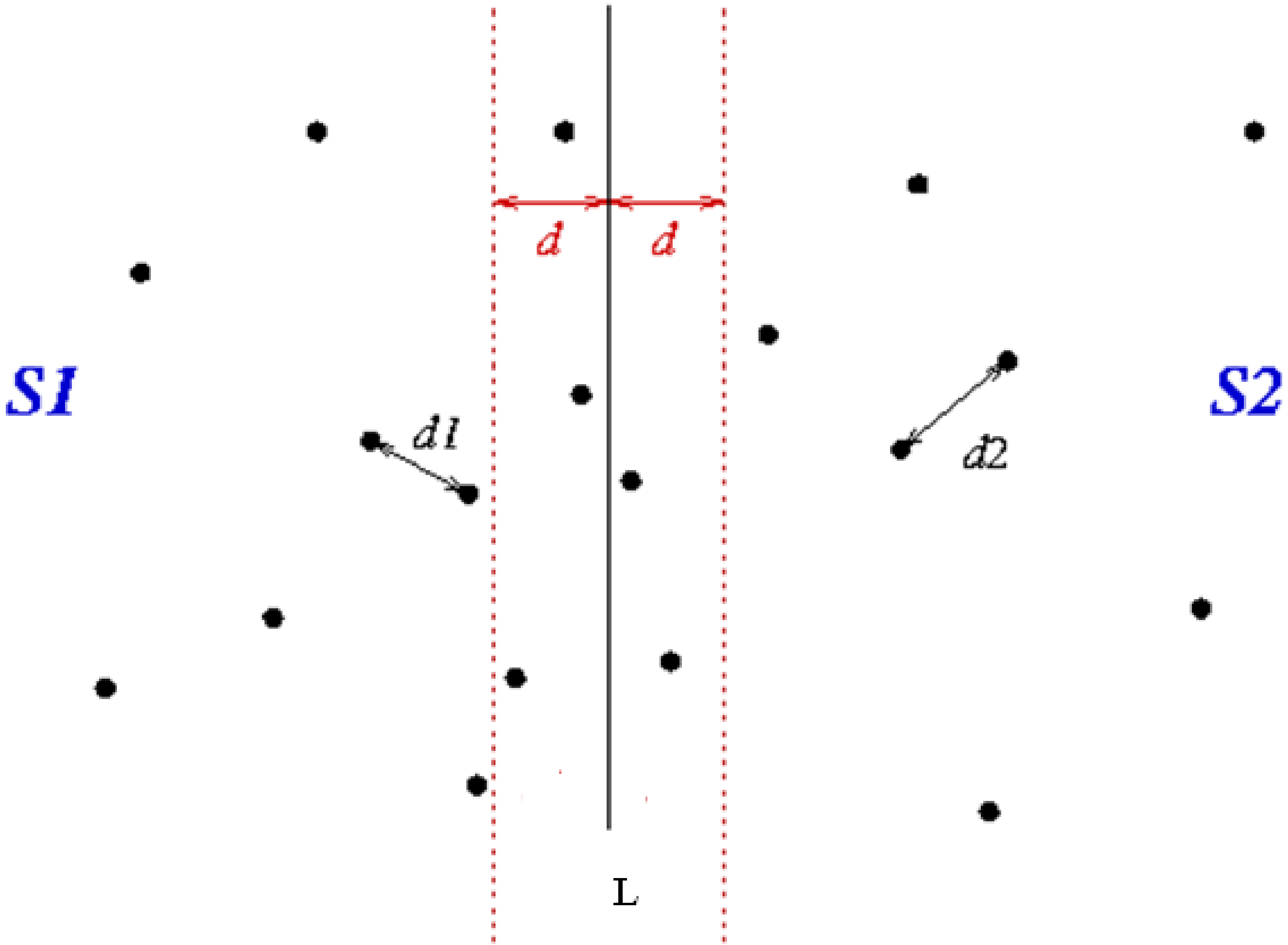
  (i) Temukan semua titik di *S1* yang memiliki absis x minimal $x_{n/2} - d$.

  (ii) Temukan semua titik di *S2* yang memiliki absis x maksimal $x_{n/2} + d$.

- Sebut semua titik-titik yang ditemukan pada langkah (i) dan (ii) tersebut sebagai himpunan S_{strip} yang berisi *s* buah titik.



S_{strip}



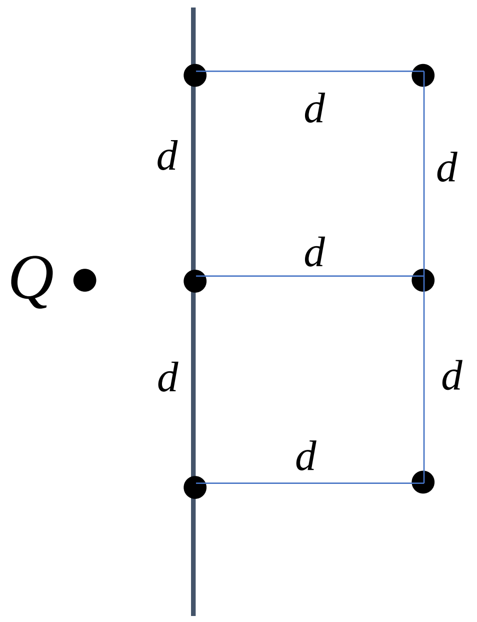
Keterangan: d = MIN($d1$, $d2$)

- Urutkan titik-titik di dalam S_{strip} dalam urutan ordinat *y* yang menaik. Misalkan q_1, q_2 , ..., q_s menyatakan hasil pengurutan.
- Hitung jarak setiap pasang titik di dalam S_{strip} dan bandingkan apakah jaraknya lebih kecil dari *d* dengan algoritma berikut:

```
for  i←1 to s do
   for  j←i+1 to s do
      if (ABS(qi.x – qj.x ) > d or  ABS(qi.y – qj.y) > d then
         { tidak diproses  }
      else
          d3 ← EUCLIDEAN(qi, qj)   { hitung jarak qi dan qj dengan rumus Euclidean }
          if  d3 < d then                { bandingkan apakah d3 lebih kecil dari d }
             d ← d3
          endif
      endif
   endfor
endfor
```

- Jika diamati, kita tidak perlu memeriksa semua titik di dalam area strip abu-abu tersebut.

- Untuk sebuah titik *Q* di sebelah kiri garis L, kita hanya perlu memeriksa paling banyak enam buah titik saja yang jaraknya sebesar *d* dari ordinat *Q* (ke atas dan ke bawah), serta titik-titik yang berjarak *d* dari garis *L.*



Kompleksitas Algoritma *Closest Pair*

- Pengurutan titik-titik dalam absis *x* dan ordinat *y* dilakukan sebelum menerapkan algoritma *Divide and Conquer*.
- Pemrosesan titik-titik di dalam S_{strip} memerlukan waktu $t(n) = cn = O(n)$.
- Kompleksitas algoritma *closest pair*:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + cn & , n > 2 \\ a & , n = 2 \end{cases}$$

Solusi dari persamaan di atas dengan Teorema Master adalah $T(n) = O(n \log n)$
$\rightarrow$ Lebih baik dari algoritma *brute force* yang $O(n^2)$

BERSAMBUNG