Algoritma Runut-balik (*Backtracking*) (Bagian 1)

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

2021

Pendahuluan

- *Backtracking* dapat dipandang sebagai salah satu dari dua hal berikut:
  1. Sebagai sebuah *fase* di dalam algoritma traversal DFS → Sudah dijelaskan di dalam materi DFS/BFS.

  2. Sebagai sebuah *metode* pemecahan masalah yang mangkus, terstruktur, dan sistematis, baik untuk persoalan optimasi maupun non-optimasi

Backtacking sebagai sebuah metode pemecahan masalah yang sangkil

- Algoritma runut-balik merupakan perbaikan dari *exhaustive search*.
- Pada *exhaustive search*, semua kemungkinan solusi dieksplorasi dan dievaluasi satu per satu.
- Sedangkan pada algoritma *backtracking*, hanya pilihan yang mengarah ke solusi yang dieksplorasi, pilihan yang tidak mengarah ke solusi tidak dipertimbangkan lagi

  → Memangkas (*pruning*) simpul-simpul yang tidak mengarah ke solusi.

- Algoritma runut-balik pertama kali diperkenalkan oleh D. H. Lehmer tahun 1950.
- Kemudian R.J Walker, Golomb, dan Baumert menyajikan uraian umum tentang algoritma runut-balik.

Properti Umum Algoritma Runut-balik

1. **Solusi persoalan.**

- Solusi dinyatakan sebagai vektor dengan *n-tuple*: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in S_i$. Umumnya $S_1 = S_2 = \ldots = S_n$.

- Contoh: Pada persoalan *1/0 knapsack* $S_i = \{0, 1\}$, $x_i = 0$ atau 1

2. **Fungsi pembangkit** nilai x_k

- Dinyatakan sebagai predikat *T*()

- *T*(x[1], *x*[2], …, *x*[*k* – 1]) membangkitkan nilai untuk x_k, yang merupakan komponen vektor solusi.

3. **Fungsi pembatas (*bounding function*)**

- Dinyatakan sebagai predikat $B(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

- *B* bernilai *true* jika $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ mengarah ke solusi. Mengarah ke solusi artinya tidak melanggar kendala (*constraints*)

- Jika *true*, maka pembangkitan nilai untuk x_{k+1} dilanjutkan, tetapi jika *false*, maka $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dibuang.

Pengorganisasian Solusi

- Semua kemungkinan solusi dari persoalan disebut **ruang solusi** (*solution space*).

- Tinjau *Knapsack* 0/1 untuk n = 3.
- Solusi persoalan dinyatakan sebagai $X = (x_1, x_2, x_3)$ dengan $x_i \in \{0,1\}$.
- Ruang solusinya adalah:

$$\{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

- Ruang solusi diorganisasikan ke dalam struktur pohon berakar.

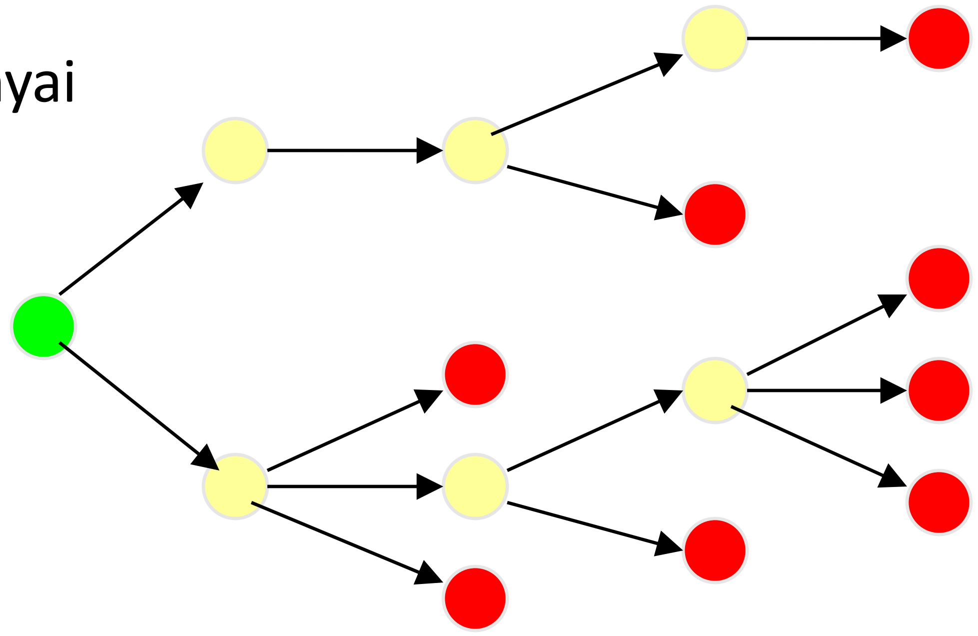
- Tiap simpul pohon menyatakan status (*state*) persoalan, sedangkan sisi (cabang) dilabeli dengan nilai-nilai x_i.

- Lintasan dari akar ke daun menyatakan solusi yang mungkin.

- Seluruh lintasan dari akar ke daun membentuk ruang solusi.

- Pengorganisasian pohon ruang solusi diacu sebagai **pohon ruang status** (*state space tree*).

Sebuah pohon adalah sekumpulan simpul dan busur yang tidak mempunyai sirkuit



Ada tiga macam simpul:

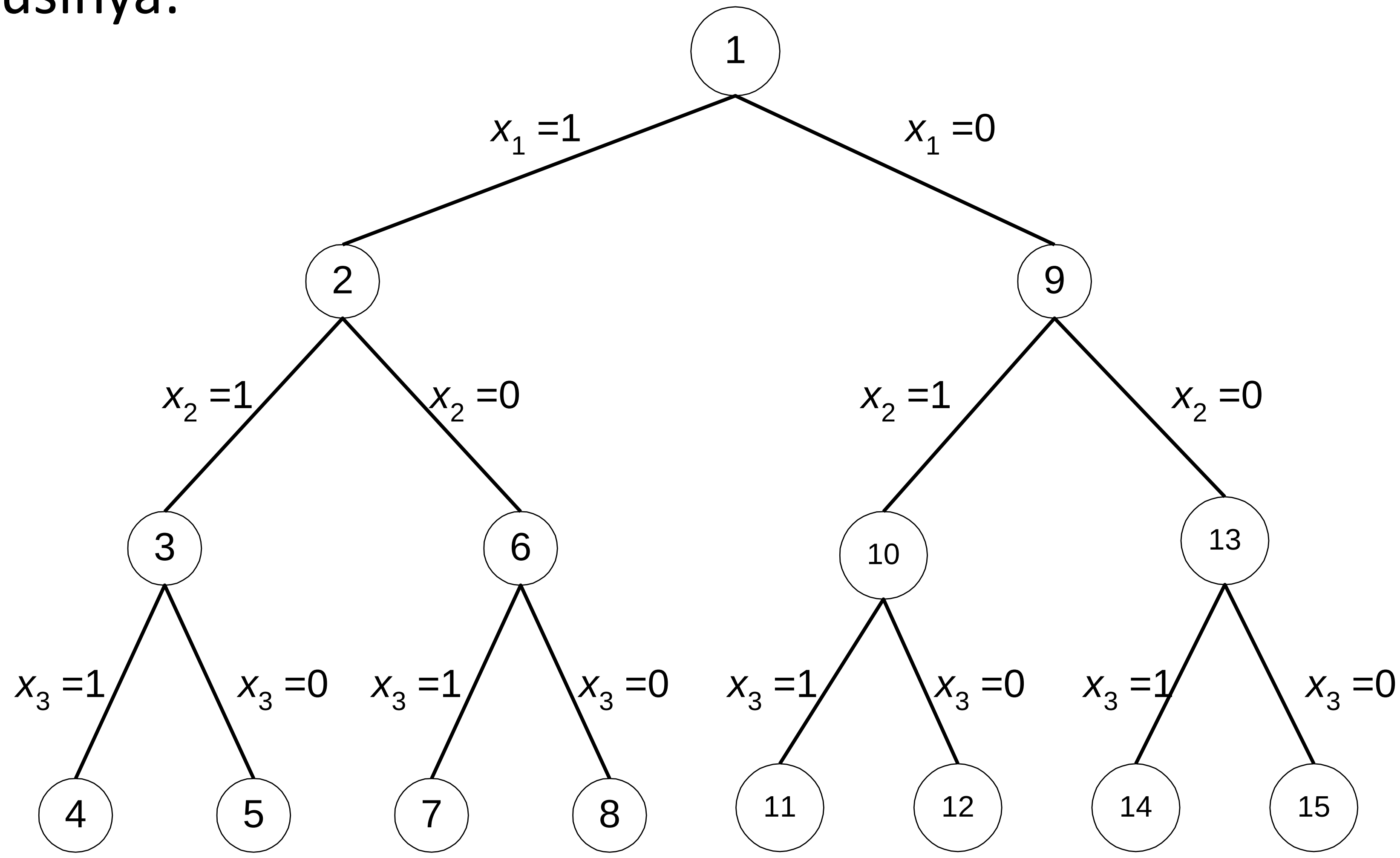
- Simpul akar
- Simpul dalam
- Simpul daun

Backtracking dapat dipandang sebagai pencarian di dalam pohon dari akar menuju daun (simpul solusi)

*) Sumber: *www.cis.upenn.edu/.../35-**backtracking**.ppt*

Tinjau persoalan *Knapsack* 1/0 untuk n = 3.

Ruang solusinya:



Catatan: simpul-simpul dinomori dengan aturan *depth-first search*

Prinsip Pencarian Solusi dengan Algoritma Runut-balik

- Solusi dicari dengan membangkitkan simpul-simpul status sehingga menghasilkan lintasan dari akar ke daun.

- Aturan pembangkitan simpul yang dipakai adalah mengikuti aturan *depht-first order* (DFS).

- Simpul-simpul yang sudah dibangkitkan dinamakan **simpul hidup** (*live node*).

- Simpul hidup yang *sedang* diperluas dinamakan **simpul-E** (*Expand-node*).

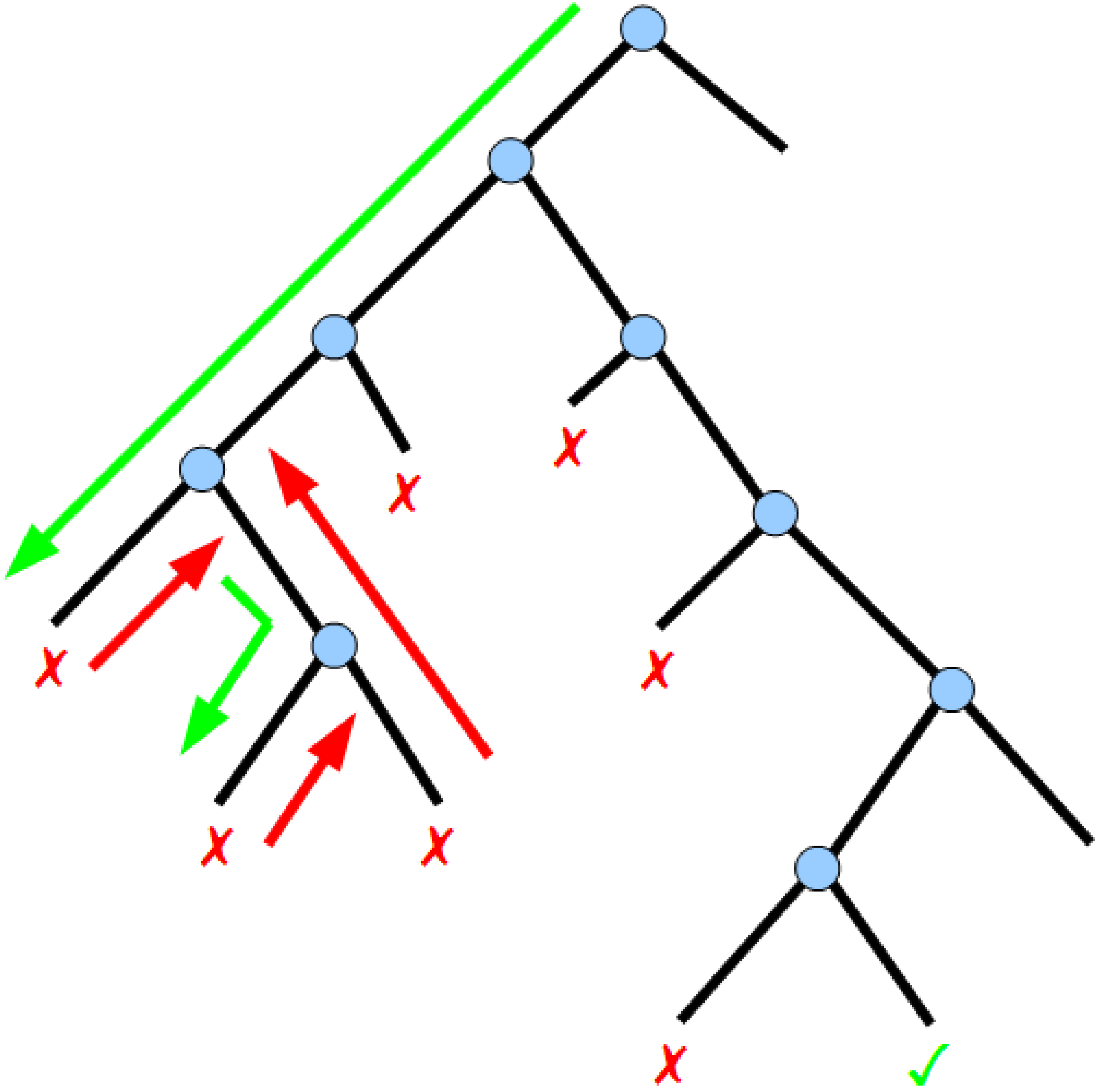
- Tiap kali simpul-E diperluas, lintasan yang dibangun olehnya bertambah panjang.
- Jika lintasan yang sedang dibentuk tidak mengarah ke solusi, maka simpul-E tersebut “dimatikan” sehingga menjadi **simpul mati** (*dead node*).
- Fungsi yang digunakan untuk mematikan simpul-E adalah dengan menerapkan **fungsi pembatas** (*bounding function*).
- Ketika sebuah simpul mati, maka secara implist kita telah memangkas (*pruning*) simpul-simpul anaknya.

- Jika pembentukan lintasan berakhir dengan simpul mati, maka proses pencarian *backtrack* ke simpul pada aras diatasnya

- Lalu, teruskan dengan membangkitkan simpul anak yang lainnya.

- Selanjutnya simpul ini menjadi simpul-E yang baru.

- Pencarian dihentikan bila kita telah sampai pada *goal node*.



Sumber: http://www.w3.org/2011/Talks/01-14-steven-phenotype/

- Tinjau persoalan 1/0 *Knapsack* dengan instansiasi:

  $n = 3$

  $(w_1, w_2, w_3) = (35, 32, 25)$

  $(p_1, p_2, p_3) = (40, 25, 50)$

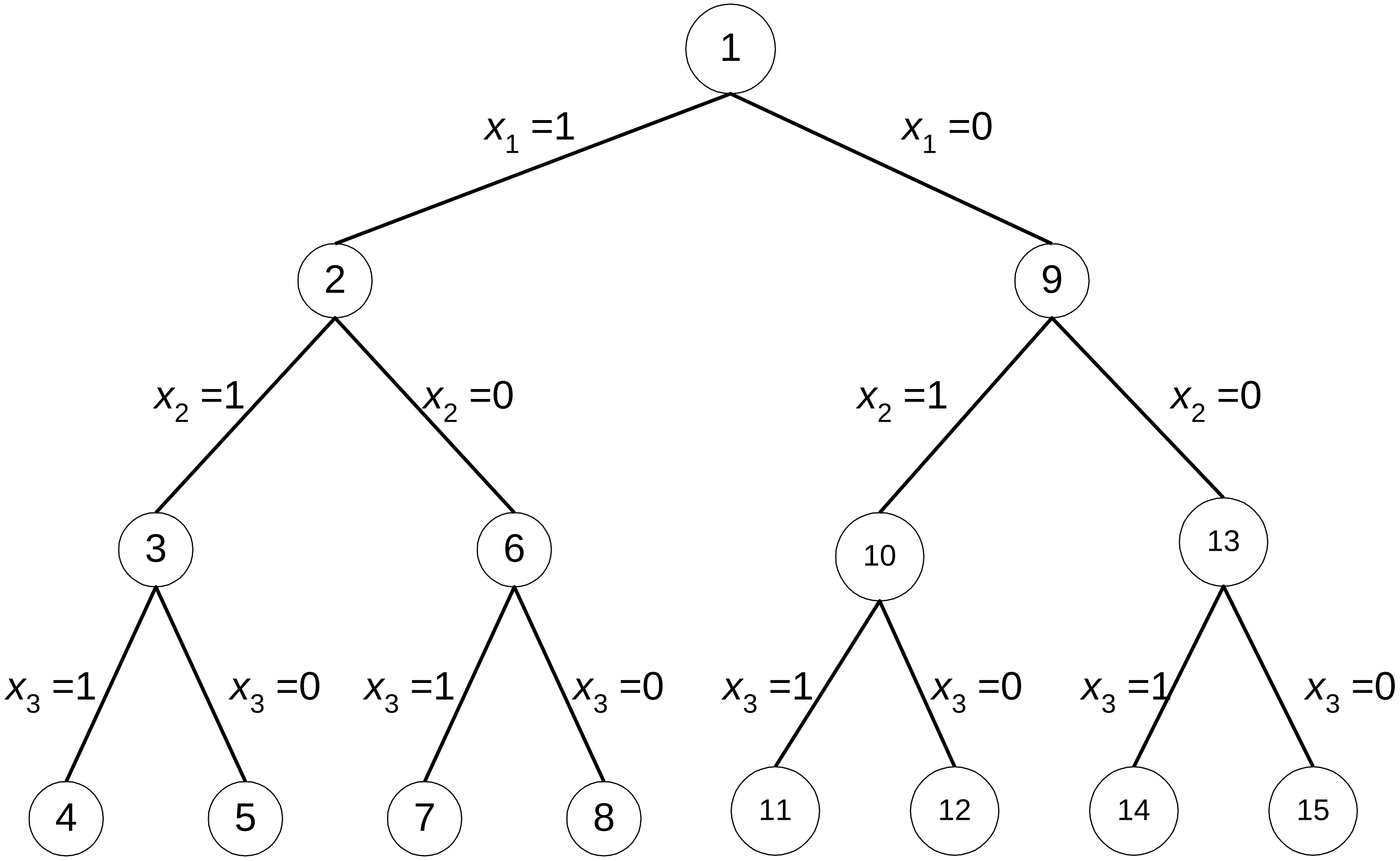
  $M = 30$

- Solusi dinyatakan sebagai $X = (x_1, x_2, x_3)$, $x_i \in \{0, 1\}$.

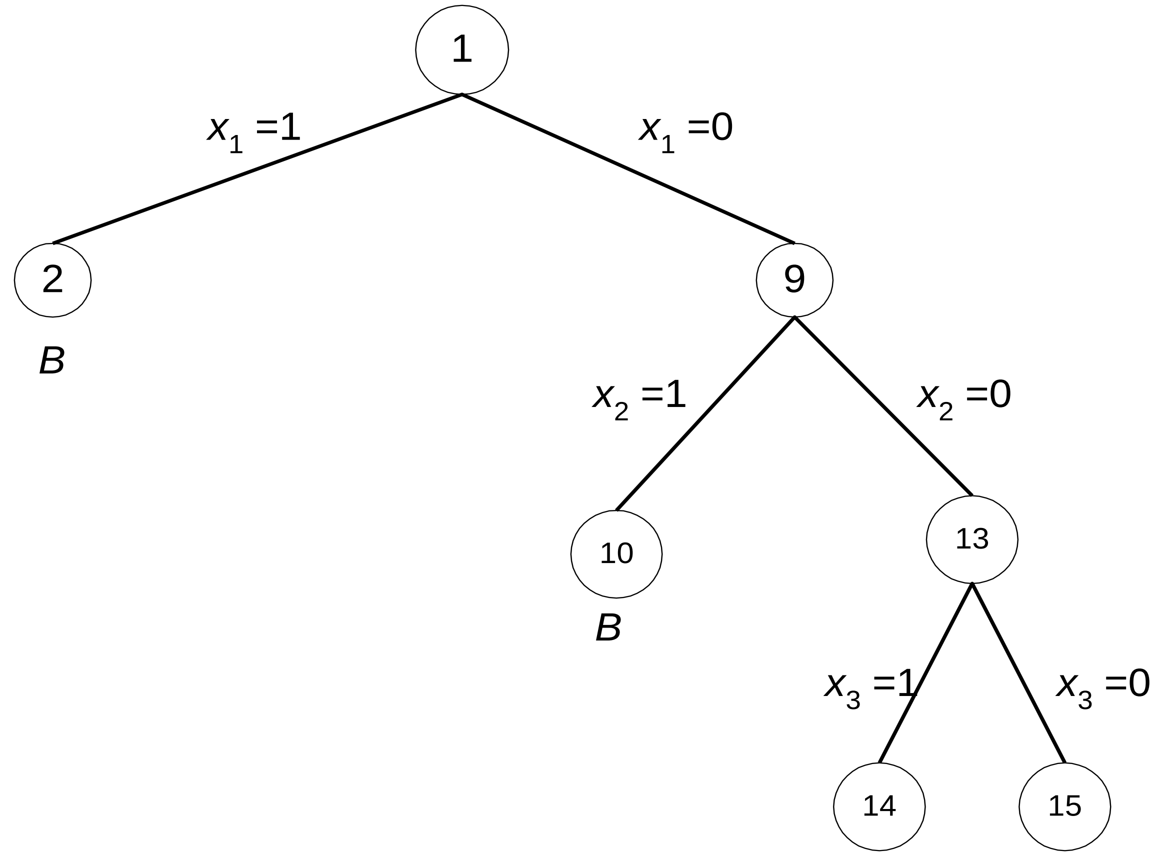
- Fungsi konstrain (dapat dianggap sebagai *bounding function*):

$$\sum_{i=1}^{k} w_i x_i \leq M$$

Pada metode *brute force*, semua lintasan dari akar ke daun dievaluasi

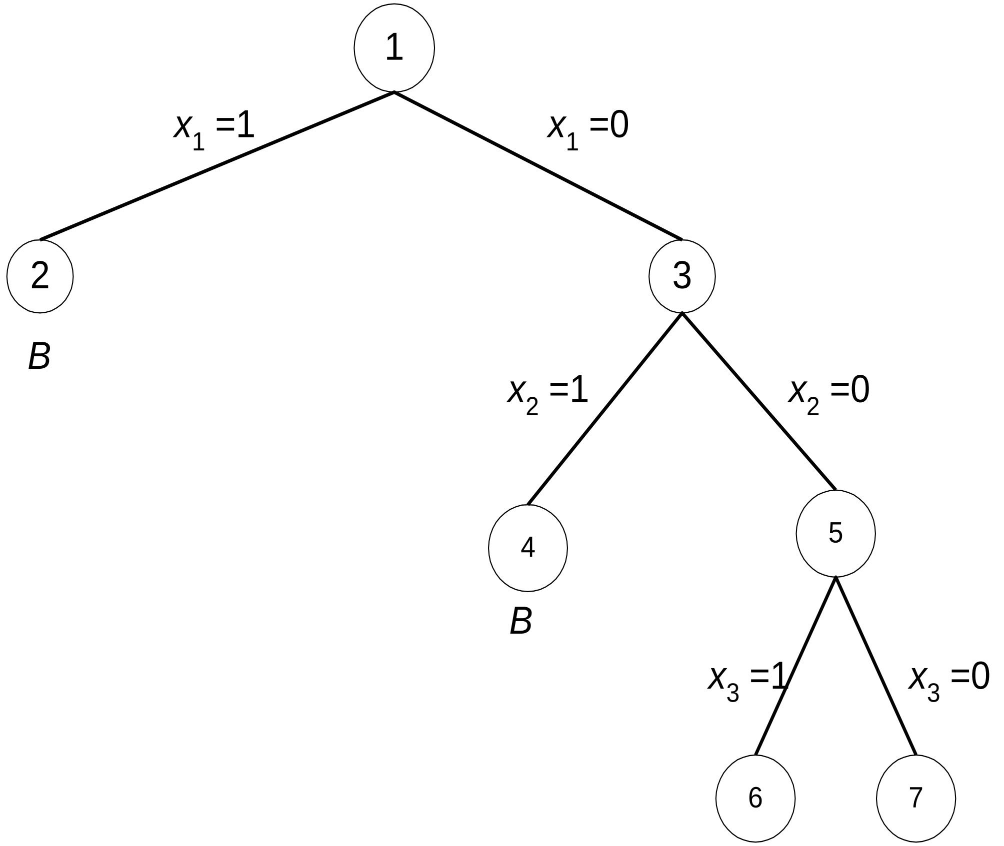


Pohon dinamis yang dibentuk selama pencarian untuk persoalan 1/0 *Knapsack* dengan n = 3, M = 30, w = (35, 32, 25) dan p = (40, 25, 50)



Keterangan: huruf B di bawah suatu simpul menandakan simpul tersebut dimatikan oleh fungsi pembatas karena melanggar kendala

Penomoran ulang simpul-simpul sesuai urutan pembangkitannya



Solusi optimumnya adalah X = (0, 0, 1) dan F = 50.

Skema Umum Algoritma Runut-Balik (versi rekursif)

```
procedure RunutBalikR(input k : integer)
{Mencari semua solusi persoalan dengan metode runut-balik; skema rekursif
Masukan: k, yaitu indeks komponen vektor solusi, x[k]. Diasumsikan x[1], x[2], …, x[k – 1] sudah
ditentukan nilainya.
Luaran: semua solusi x = (x[1], x[2], …, x[n])
}
Algoritma:
  for  setiap x[k] ∈ T(x[1], x[2], …, x[k – 1]) do
       if  B(x[1], x[2], ... ,x[k]) = true then
          if  (x[1], x[2], ... , x[k]) adalah lintasan dari akar ke simpul solusi then
             write(x[1], x[2], …, x[k])     { cetak solusi }
          endif
          if  k < n then
             RunutBalikR(k+1)    { tentukan nilai untuk x[k+1]}
          endif
       endif
  endfor
```

Pemanggilan pertama kali: RunutBalikR(1)

- Setiap simpul dalam pohon ruang status (kecuali simpul daun) berasosiasi dengan sebuah pemanggilan rekursif.

- Jika jumlah simpul dalam pohon ruang status adalah 2^n atau $n!$, maka pada kasus terburuk, algoritma runut-balik membutuhkan waktu dalam $O(p(n)2^n)$ atau $O(q(n)n!)$,

- dengan $p(n)$ dan $q(n)$ adalah polinom derajat n yang menyatakan waktu komputasi setiap simpul.

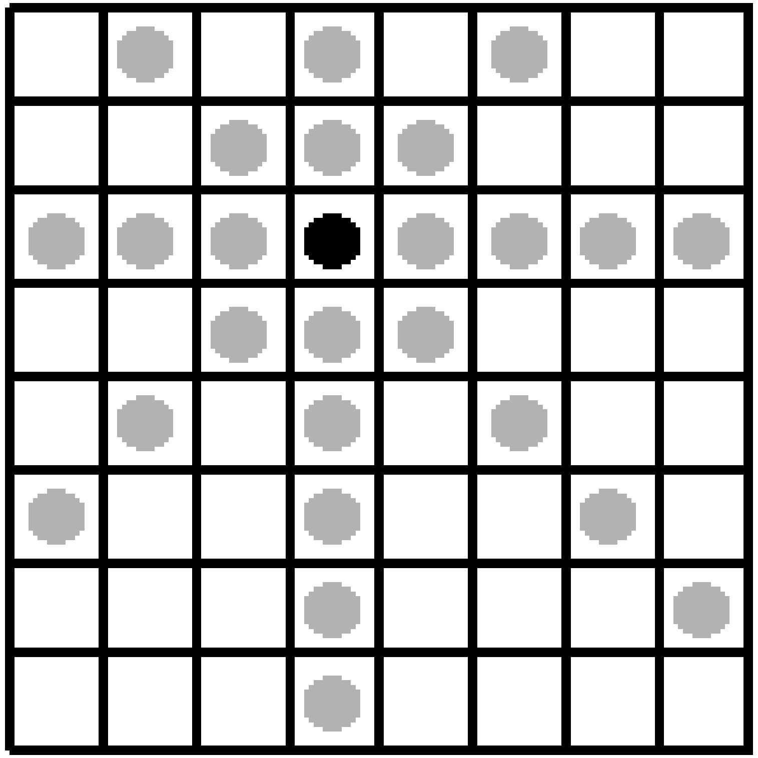
Skema Umum Algoritma Runut-Balik (versi iteratif)

```
procedure RunutBalikI(input k : integer)
{Mencari semua solusi persoalan dengan metode runut-balik; skema iteratif
Masukan: k, yaitu indeks komponen vektor solusi, x[k]. Diasumsikan x[1], x[2], …, x[k – 1] sudah ditentukan
nilainya.
Luaran: semua solusi x = (x[1], x[2], …, x[n])
}
Algoritma:
    while  k ≠ 0  do
        if  terdapat nilai x[k] yang belum dicoba sedemikian sehingga x[k] ∈ T(x[1], x[2], …, x[k – 1]) and
            B(x[1], x[2], … ,x[k]) = true then
            if  (x[1], x[2], … , x[k]) adalah lintasan dari akar ke simpul solusi then
                write(x[1], x[2], …, x[k])      { cetak solusi }
            endif
            k ← k + 1       { tentukan nilai x[k] selanjutnya }
        else
            k ← k – 1
        endif
    endwhile
```

Pemanggilan pertama kali: RunutBalikI(1)

1. Persoalan N-Ratu (*The N-Queens Problem*)

- Diberikan sebuah papan catur yang berukuran $N \times N$ dan N buah ratu. Bagaimanakah cara menempatkan N buah ratu (Q) itu pada petak-petak papan catur sedemikian sehingga tidak ada dua ratu atau lebih yang terletak pada satu baris yang sama, atau pada satu kolom yang sama, atau pada satu diagonal yang sama?



N = 8

Contoh 2 buah solusi *8-queen problem*:

	Q						
			Q				
					Q		
							Q
		Q					
Q							
						Q	
				Q			

							Q
		Q					
Q							
					Q		
	Q						
				Q			
						Q	
			Q				

- The puzzle was originally proposed in 1848 by the chess player Max Bezzel, and over the years, many mathematicians, including Gauss, have worked on this puzzle and its generalized N-queens problem. The first solutions were provided by Franz Nauck in 1850. Nauck also extended the puzzle to n-queens problem (on an N×N board—a chessboard of arbitrary size).

- Edsger Dijkstra used this problem in 1972 to illustrate the power of what he called structured programming. He published a highly detailed description of the development of a depth-first backtracking algorithm.[2]

(Sumber: laman Wikipedia)

Penyelesaian dengan Algoritma Brute-Force (N = 8):

a) Brute Force 1

- Mencoba semua kemungkinan solusi penempatan delapan buah ratu pada petak-petak papan catur.

- Penempatan ratu dilakukan secara acak pada petak-petak papan catur

- Terdapat $C(64, 8)$ = 4.426.165.368 kemungkinan solusi yang perlu dievaluasi.

b) Brute Force 2

- Meletakkan masing-masing ratu pada setiap baris yang berbeda. Untuk setiap baris, kita coba menempatkan ratu mulai dari kolom 1, 2, …, 8.

- Jumlah kemungkinan solusi yang diperiksa berkurang menjadi

$$8^8 = 16.777.216$$

```
procedure Ratu1
{Mmencari semua solusi penempatan delapan ratu pada petak-petak papan catur yang  berukuran 8 x 8  }
Deklarasi
   i1, i2, i3, i4, i5, i6, i7, i8 : integer
 Algoritma:
    for  i1←1 to 8 do
       for i2←1 to 8 do
          for  i3←1 to 8 do
              for i4←1 to 8 do
                for i5←1 to 8 do
                  for i6←1 to 8 do
                      for  i7←1 to 8 do
                         for  i8←1 to 8 do
                              { periksa apakah i1, i2, i3, i4, i5, i6, i7, i8 merupakan solusi }
                              if  Solusi(i1, i2, i3, i4, i5, i6, i7, i8)  then
                                  write(i1, i2, i3, i4, i5, i6, i7, i8)
                             endif
                        endfor
                      endfor
                  endfor
               endfor
           endfor
        endfor
     endfor
 endfor
```

c) Brute Force 3 (exhaustive search)

- Misalkan solusinya dinyatakan dalam vektor 8-*tupple*:

  $X = (x_1 , x_2 , ... , x_8)$

  x_i menyatakan kolom kedudukan ratu pada baris ke-*i*

  Contoh solusi: $X = (2, 4, 6, 8, 3, 1, 7, 5)$
  $X = (8, 3, 1, 6, 2, 5, 7, 4)$

- Vektor solusi X merupakan permutasi bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

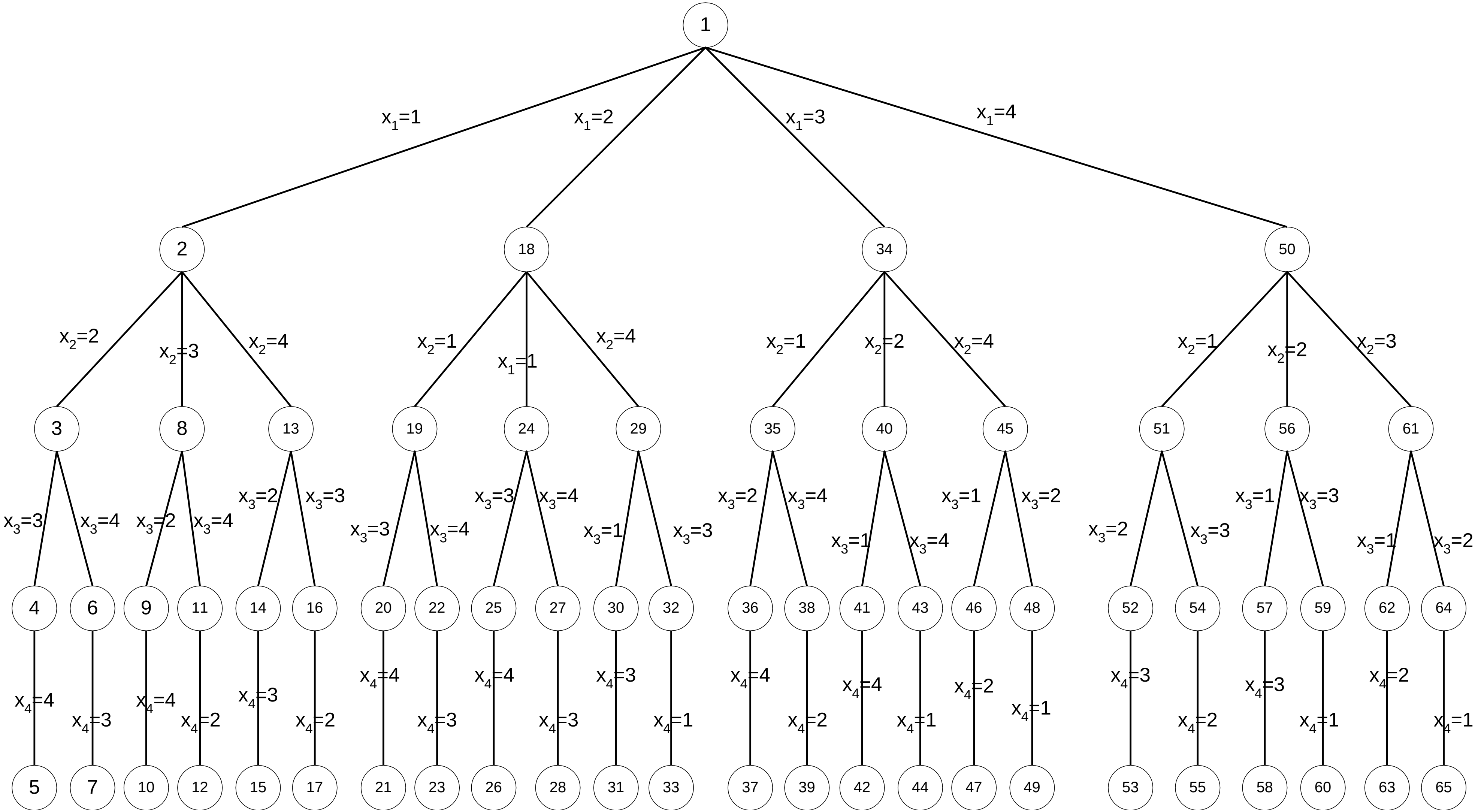
- Jumlah permutasi bilangan 1 sampai 8 adalah $P(1, 8)$= 8! = 40.320 buah.

```
procedure Ratu2
{Mencari semua solusi penempatan delapan ratu pada petak-petak papan catur yang  berukuran 8 x 8  }

Deklarasi
   X : array[1..n] of integer
   n, i : integer

Algoritma:
   n ← 40320  { Jumlah permutasi (1, 2, …, 8) }
   i ←1
   repeat
      X ←Permutasi(8)   { Bangkitan permutasi (1, 2, …, 8) }

      { periksa apakah X merupakan solusi }
      if   Solusi(X) then
         write(x[1], x[2], …, x[k])      { cetak solusi }
      endif

      i←i+1   { ulangi untuk permutasi berikutnya }
  until  i > n
```

Penyelesaian dengan Algoritma Runut-balik:

- Algoritma runut-balik memperbaiki algoritma *brute force* 3 (*exhaustive search*).
- Ruang solusinya adalah semua permutasi dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
- Setiap permutasi dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dinyatakan dengan lintasan dari akar daun. Sisi-sisi pada pohon diberi label nilai x_i.

Contoh: Pohon ruang-status persoalan 4-Ratu



Contoh solusi runut-balik persoalan 4-Ratu:

1			

(a)

1			
●	●	2	

(b)

1			
		2	
●	●	●	●

(c)

1			
			2
●	3		

(d)

1			
			2
	3		
●	●	●	●

(e)

	1		

(f)

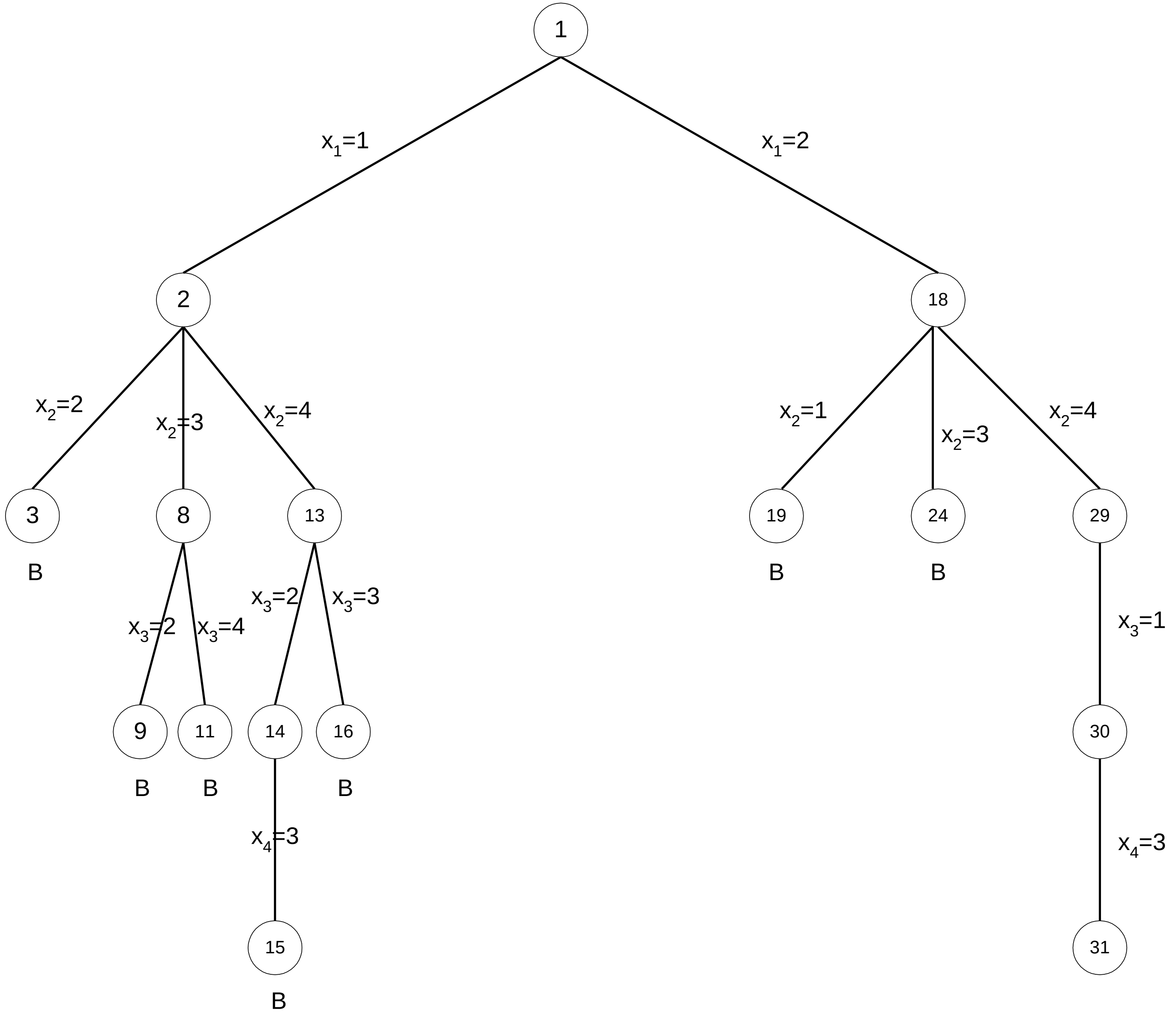
	1		
●	●	●	2

(g)

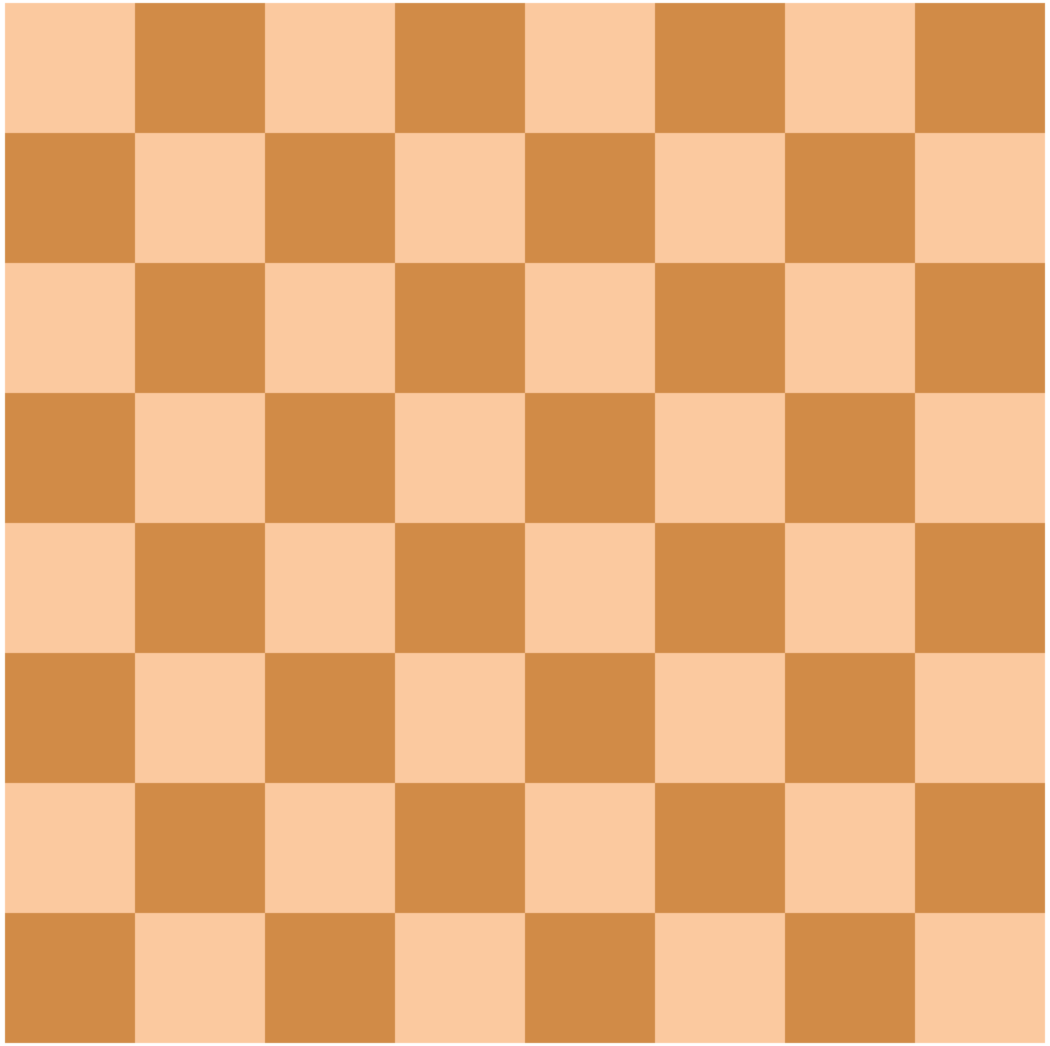
	1		
			2
3			
●	●	4	

(h)

Pohon ruang status persoalan 4-Ratu yang dibentuk selama pencarian:



Ket: Huruf B di bawah suatu simpul menyatakan bahwa simpul tersebut dibunuh oleh *bounding function*



Algoritma Runut-balik untuk Persoalan 8-Ratu

- Tinjau dua posisi ratu pada (i, j) dan (m, n)
- Dua buah ratu terletak pada baris yang sama, berarti

$$i = m$$

- Dua buah ratu terletak pada kolom yang sama, berarti

$$j = n$$

- Dua buah ratu terletak pada diagonal yang sama, berarti

$\searrow$ $i - j = m - n$ atau $\swarrow$ $i + j = m + n$

$\Leftrightarrow i - m = j - n$ atau $m - i = j - n$

$\Leftrightarrow |j - n| = |i - m|$

```
function Tempat(input k , i : integer)→boolean
{true jika ratu dapat ditempatkan pada baris ke-k dan kolom ke-i, false jika tidak}

Deklarasi
   j : integer

Algoritma:
  for  j ← 1 to k – 1  do      { periksa ratu-ratu mulai dari baris ke-1 sampai baris k – 1 }
       if  (x[j] = i)        {apakah ada dua buah ratu terletak pada kolom yang sama?}
              or                                   {atau }
          (ABS(x[j] – i]) = ABS(j – k )) {  apakah ada dua ratu pada diagonal yang sama?}
       then
            return false      { ratu tidak dapat ditempatkan pada baris ke-k dan kolom ke-i }
       endif
  endfor
  return true
```

Function *Tempat* dapat dianggap sebagai *bounding function*

Algoritma:

- Inisialisasi $x[1]$, $x[2]$, …, $x[N]$ dengan 0 sebagai berikut:

$$\textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } N \textbf{ do}$$
$$\quad x[i] \leftarrow 0$$
$$\textbf{endfor}$$

- Panggil prosedur *Nratu_R*(1, *N*)

Versi rekursif

```
procedure Nratu_R(input k, N : integer)
{ Algoritma rekursif untuk menghasilkan semua solusi penempatan N buah ratu pada petak papan catur N x N
tanpa melanggar kendala;
Masukan: N = jumlah ratu
Luaran: semua solusi x = (x[1], x[2], …, x[N]) dicetak ke layar. }

Deklarasi
   i : integer

Algoritma:
    for  i ← 1 to N  do
       if  Tempat(k, i)  then   { periksa apakah ratu ke-k dapat   ditempatkan pada baris k dan kolom i }
           x[k] ← i
           if  k = N  then                    { apakah solusi sudah lengkap? }
               write(x[1], x[2], …, x[k])      { cetak solusi }
           else
               Nratu_R(k + 1, N)
           endif
       endif
    endfor
```

Versi iteratif

```
procedure Nratu_I(input k : integer, N : integer)
{ Algoritma iteratif untuk menghasilkan semua solusi penempatan N buah ratu pada petak papan catur N x N
tanpa melanggar kendala;
Masukan: N = jumlah ratu
Luaran: semua solusi x = (x[1], x[2], …, x[N]) dicetak ke layar.   }
Deklarasi
    i : integer
    stop : boolean
Algoritma:
    i ← 0
    while k ≠ 0 do
      i ← i + 1
      stop ← false
      while (i <= N) and (not stop)  do
         if Tempat(k, i) then  {periksa apakah ratu dapat ditempatkan pada baris k dan kolom i}
            x[k] ← i
            if k = N  then { apakah solusi sudah lengkap?}
              write(x[1], x[2], …, x[k])       { cetak solusi }
              stop ← true
            else
              k ← k + 1    { menempatkan ratu untuk baris berikutnya}
              i ← 1
            endif
         else
            i ← i+1
         endif
      endwhile  {i>N}
      k ← k - 1      { runut-balik ke baris sebelumnya}
      i ← x[k]
    endwhile
```

Lampiran Program C++

Versi rekursif

```
/ Program N-Queen Problem dengan algoritma backtracking
// Versi rekursif

#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;

int x[9], sol;

bool Tempat(int k, int i)
{
    int j;

    for(j=1; j<=k-1;j++){
       if ((x[j]==i) || (abs(x[j]-i)==abs(j-k))) {
        return false;
       }
    }
    return true;
}
```

```
void Nratu_R(int k, int N) {
  int i,m;

  for(i=1;i<=N;i++) {
    if (Tempat(k,i)){
       x[k]=i;
       if (k==N) {
          sol = sol + 1;
          cout << "Solusi ke-" << sol << ": ";
          for(m=1;m<=N;m++) cout << x[m] << " "; cout << endl;
      }
      else
         Nratu_R(k+1,N);
    }
  }
}

int main() {
 int j, N;

 N = 4;
 sol = 0;
 cout << "N = " << N << endl;
 for (j=1;j<=N; j++) { x[j]=0; }
 Nratu_R(1,N);
 return 0;
}
```

Versi iteratif

```
// Program N-Queen Problem dengan algoritma backtracking
// Versi iteratif
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;

int x[9], sol;

bool Tempat(int k, int i)
{
    int j;

    for(j=1; j<=k-1;j++){
       if ((x[j]==i) || (abs(x[j]-i)==abs(j-k))) {
        return false;
       }
    }
    return true;
}

void Nratu_I(int k, int N)
{
  int i,m;
  bool stop;
```

```
  i = 0;
  sol = 0;
  while (k>0) {
    i = i + 1;
    stop = false;
    while (i<=N && !stop){
      if (Tempat(k,i)) {
        x[k] = i;
        if (k==N) {
          sol = sol + 1;
          cout << "Solusi ke-" << sol << ": ";
          for(m=1;m<=N;m++) cout << x[m] << "  "; cout << endl;
          stop = true;
        }
        else {
          k = k + 1;
          i = 1;
        }
      }
      else
        i = i + 1;
    }
    k = k-1;
    i = x[k];
  }
}
```

```
int main() {
 int j, N;

 N = 8;
 cout << "N = " << N << endl;
 for (j=1;j<=N; j++) {
    x[j]=0;
 }
 Nratu_I(1,N);
 return 0;
 }
```

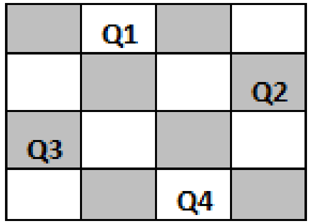
Hasil *run* program untuk *N* = 4

Command Prompt

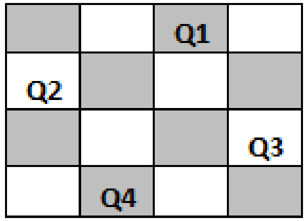
```
D:\IF2211 Strategi Algoritma\2021>g++ NratuR.cpp

D:\IF2211 Strategi Algoritma\2021>a
N = 4
Solusi ke-1: 2 4 1 3
Solusi ke-2: 3 1 4 2

D:\IF2211 Strategi Algoritma\2021>_
```

Cara membaca hasil *run* ini:

Solusi ke-1: 2 4 1 3, artinya pada baris ke-1 ratu ditempatkan pada kolom ke-2
pada baris ke-2 ratu ditempatkan pada kolom ke-4
pada baris ke-3 ratu ditempatkan pada kolom ke-1
pada baris ke-4 ratu ditempatkan pada kolom ke-3



Solusi ke-2: 3 1 4 2, artinya pada baris ke-1 ratu ditempatkan pada kolom ke-3
pada baris ke-2 ratu ditempatkan pada kolom ke-1
pada baris ke-3 ratu ditempatkan pada kolom ke-4
pada baris ke-4 ratu ditempatkan pada kolom ke-2



Hasil *run* program untuk N = 8

Command Prompt

```
D:\IF2211 Strategi Algoritma\2021>a
N = 8
Solusi ke-1: 1 5 8 6 3 7 2 4
Solusi ke-2: 1 6 8 3 7 4 2 5
Solusi ke-3: 1 7 4 6 8 2 5 3
Solusi ke-4: 1 7 5 8 2 4 6 3
Solusi ke-5: 2 4 6 8 3 1 7 5
Solusi ke-6: 2 5 7 1 3 8 6 4
Solusi ke-7: 2 5 7 4 1 8 6 3
Solusi ke-8: 2 6 1 7 4 8 3 5
Solusi ke-9: 2 6 8 3 1 4 7 5
Solusi ke-10: 2 7 3 6 8 5 1 4
Solusi ke-11: 2 7 5 8 1 4 6 3
Solusi ke-12: 2 8 6 1 3 5 7 4
Solusi ke-13: 3 1 7 5 8 2 4 6
Solusi ke-14: 3 5 2 8 1 7 4 6
Solusi ke-15: 3 5 2 8 6 4 7 1
Solusi ke-16: 3 5 7 1 4 2 8 6
Solusi ke-17: 3 5 8 4 1 7 2 6
Solusi ke-18: 3 6 2 5 8 1 7 4
Solusi ke-19: 3 6 2 7 1 4 8 5
Solusi ke-20: 3 6 2 7 5 1 8 4
Solusi ke-21: 3 6 4 1 8 5 7 2
Solusi ke-22: 3 6 4 2 8 5 7 1
Solusi ke-23: 3 6 8 1 4 7 5 2
Solusi ke-24: 3 6 8 1 5 7 2 4
Solusi ke-25: 3 6 8 2 4 1 7 5
Solusi ke-26: 3 7 2 8 5 1 4 6
Solusi ke-27: 3 7 2 8 6 4 1 5
Solusi ke-28: 3 8 4 7 1 6 2 5
Solusi ke-29: 4 1 5 8 2 7 3 6
```

Command Prompt

```
Solusi ke-30: 4 1 5 8 6 3 7 2
Solusi ke-31: 4 2 5 8 6 1 3 7
Solusi ke-32: 4 2 7 3 6 8 1 5
Solusi ke-33: 4 2 7 3 6 8 5 1
Solusi ke-34: 4 2 7 5 1 8 6 3
Solusi ke-35: 4 2 8 5 7 1 3 6
Solusi ke-36: 4 2 8 6 1 3 5 7
Solusi ke-37: 4 6 1 5 2 8 3 7
Solusi ke-38: 4 6 8 2 7 1 3 5
Solusi ke-39: 4 6 8 3 1 7 5 2
Solusi ke-40: 4 7 1 8 5 2 6 3
Solusi ke-41: 4 7 3 8 2 5 1 6
Solusi ke-42: 4 7 5 2 6 1 3 8
Solusi ke-43: 4 7 5 3 1 6 8 2
Solusi ke-44: 4 8 1 3 6 2 7 5
Solusi ke-45: 4 8 1 5 7 2 6 3
Solusi ke-46: 4 8 5 3 1 7 2 6
Solusi ke-47: 5 1 4 6 8 2 7 3
Solusi ke-48: 5 1 8 4 2 7 3 6
Solusi ke-49: 5 1 8 6 3 7 2 4
Solusi ke-50: 5 2 4 6 8 3 1 7
Solusi ke-51: 5 2 4 7 3 8 6 1
Solusi ke-52: 5 2 6 1 7 4 8 3
Solusi ke-53: 5 2 8 1 4 7 3 6
Solusi ke-54: 5 3 1 6 8 2 4 7
Solusi ke-55: 5 3 1 7 2 8 6 4
Solusi ke-56: 5 3 8 4 7 1 6 2
Solusi ke-57: 5 7 1 3 8 6 4 2
Solusi ke-58: 5 7 1 4 2 8 6 3
Solusi ke-59: 5 7 2 4 8 1 3 6
Solusi ke-60: 5 7 2 6 3 1 4 8
Solusi ke-61: 5 7 2 6 3 1 8 4
```

Command Prompt

```
Solusi ke-62: 5 7 4 1 3 8 6 2
Solusi ke-63: 5 8 4 1 3 6 2 7
Solusi ke-64: 5 8 4 1 7 2 6 3
Solusi ke-65: 6 1 5 2 8 3 7 4
Solusi ke-66: 6 2 7 1 3 5 8 4
Solusi ke-67: 6 2 7 1 4 8 5 3
Solusi ke-68: 6 3 1 7 5 8 2 4
Solusi ke-69: 6 3 1 8 4 2 7 5
Solusi ke-70: 6 3 1 8 5 2 4 7
Solusi ke-71: 6 3 5 7 1 4 2 8
Solusi ke-72: 6 3 5 8 1 4 2 7
Solusi ke-73: 6 3 7 2 4 8 1 5
Solusi ke-74: 6 3 7 2 8 5 1 4
Solusi ke-75: 6 3 7 4 1 8 2 5
Solusi ke-76: 6 4 1 5 8 2 7 3
Solusi ke-77: 6 4 2 8 5 7 1 3
Solusi ke-78: 6 4 7 1 3 5 2 8
Solusi ke-79: 6 4 7 1 8 2 5 3
Solusi ke-80: 6 8 2 4 1 7 5 3
Solusi ke-81: 7 1 3 8 6 4 2 5
Solusi ke-82: 7 2 4 1 8 5 3 6
Solusi ke-83: 7 2 6 3 1 4 8 5
Solusi ke-84: 7 3 1 6 8 5 2 4
Solusi ke-85: 7 3 8 2 5 1 6 4
Solusi ke-86: 7 4 2 5 8 1 3 6
Solusi ke-87: 7 4 2 8 6 1 3 5
Solusi ke-88: 7 5 3 1 6 8 2 4
Solusi ke-89: 8 2 4 1 7 5 3 6
Solusi ke-90: 8 2 5 3 1 7 4 6
Solusi ke-91: 8 3 1 6 2 5 7 4
Solusi ke-92: 8 4 1 3 6 2 7 5
```

Bersambung