Program Dinamis (*Dynamic Programming*)

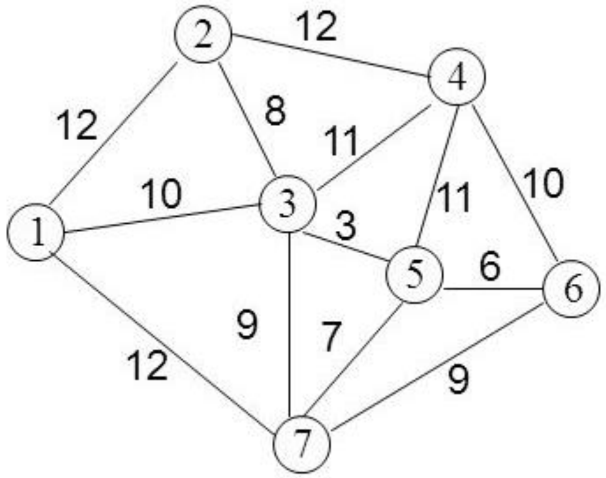
Bagian 2.2: Travelling Salesperson Problem

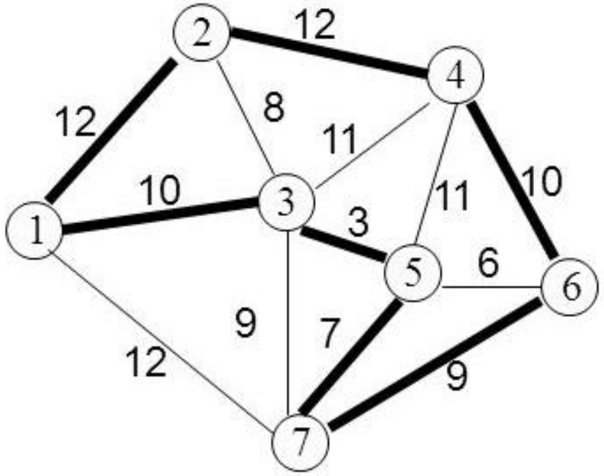
Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Persoalan 4: *Travelling Salesperson Problem* (TSP)

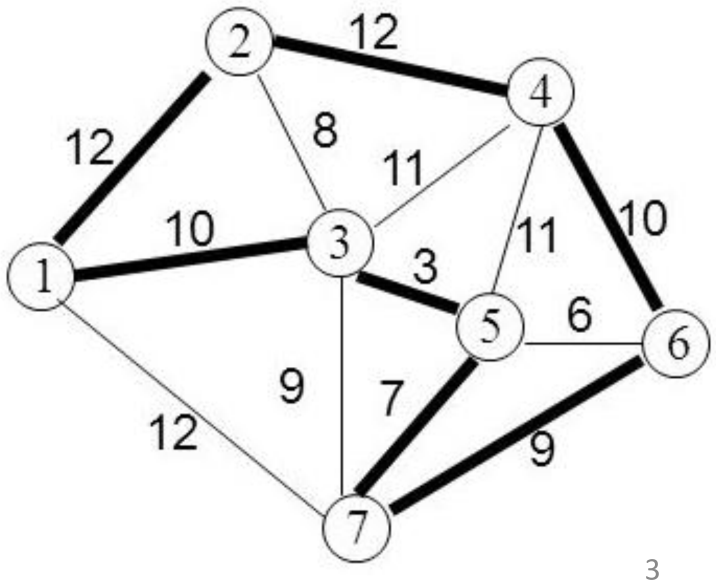
- Diberikan sejumlah kota dan diketahui jarak antar kota. Tentukan tur terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.





Travelling Salesperson Problem (TSP)

- Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf lengkap berarah dengan sisi-sisi yang diberi harga $c_{ij} > 0$.
- Misalkan $|V| = n$ dan $n > 1$. Simpul diberi nomor 1,2,…,n.
- Asumsikan perjalanan (tur) dimulai/berakhir pd simpul 1.
- Setiap tur pasti terdiri dari sisi $(1, k)$ dgn $k \in V - \{1\}$ dan sebuah lintasan dari simpul k ke simpul 1.
- Lintasan dari simpul k ke simpul 1 tersebut melalui setiap simpul di dalam $V - \{1, k\}$ tepat hanya sekali.



TSP

- Prinsip Optimalitas: jika tur tersebut optimal maka lintasan dari simpul k ke simpul 1 juga menjadi lintasan k ke 1 terpendek yang melalui simpul-simpul di dalam $V - \{1, k\}$.
- Misalkan $f(i, S)$ adalah bobot lintasan terpendek yang berawal pada simpul i, yang melalui semua simpul di dalam S dan berakhir pada simpul 1.
- Nilai $f(1, V - \{1\})$ adalah bobot tur terpendek.

- Misalkan $f(i, S)$ adalah bobot lintasan terpendek yang berawal dari simpul i, yang melalui semua simpul di dalam S dan berakhir pada simpul 1.
- Nilai $f(1, V - \{1\})$ adalah bobot tur terpendek.

Hubungan rekursif:

$$f(1, V - \{1\}) = \min_{2 \le k \le n} \{c_{1k} + f(k, V - \{1, k\})\} \qquad (1)$$

Dengan merampatkan persamaan (1), diperoleh

$$f(i, \varnothing) = c_{i,1} \quad , \quad 2 \le i \le n \qquad \text{(basis)}$$

$$f(i, S) = \min_{j \in S} \{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\} \qquad \text{(rekurens)} \quad (2)$$

Gunakan persamaan (2) untuk memperoleh $f(i, S)$ untuk $|S| = 1$, $f(i, S)$ untuk $|S| = 2$, dan seterusnya sampai untuk $|S| = n - 1$.

Tinjau persoalan TSP untuk $n = 4$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahap 1: $f(i, \varnothing) = c_{i,1} \quad , \quad 2 \le i \le n$

Diperoleh:

$f(2, \varnothing) = c_{21} = 5;$
$f(3, \varnothing) = c_{31} = 6;$
$f(4, \varnothing) = c_{41} = 8;$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahap 1: $f(i, \varnothing) = c_{i,1}$,

Diperoleh:

$f(2, \varnothing) = c_{21} = 5$

$f(3, \varnothing) = c_{31} = 6$

$f(4, \varnothing) = c_{41} = 8$

Tahap 2:

$$f(i, S) = \min_{j \in S}\{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\} \quad \text{untuk } |S| = 1$$

Diperoleh:

$f(2, \{3\}) = \min\{c_{23} + f(3, \varnothing)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$

$f(2, \{4\}) = \min\{c_{24} + f(4, \varnothing)\} = \min\{10 + 8\} = \min\{18\} = 18$

$f(3, \{2\}) = \min\{c_{32} + f(2, \varnothing)\} = \min\{13 + 5\} = \min\{18\} = 18$

$f(3, \{4\}) = \min\{c_{34} + f(4, \varnothing)\} = \min\{12 + 8\} = \min\{20\} = 20$

$f(4, \{2\}) = \min\{c_{42} + f(2, \varnothing)\} = \min\{8 + 5\} = \min\{13\} = 13$

$f(4, \{3\}) = \min\{c_{43} + f(3, \varnothing)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$f(2, \{3\}) = \min\{c_{23} + f(3, \varnothing)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$
$f(2, \{4\}) = \min\{c_{24} + f(4, \varnothing)\} = \min\{10 + 8\} = \min\{18\} = 18$
$f(3, \{2\}) = \min\{c_{32} + f(2, \varnothing)\} = \min\{13 + 5\} = \min\{18\} = 18$
$f(3, \{4\}) = \min\{c_{34} + f(4, \varnothing)\} = \min\{12 + 8\} = \min\{20\} = 20$
$f(4, \{2\}) = \min\{c_{42} + f(2, \varnothing)\} = \min\{8 + 5\} = \min\{13\} = 13$
$f(4, \{3\}) = \min\{c_{43} + f(3, \varnothing)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$

Tahap 3:

$$f(i, S) = \min_{j \in S}\{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\}$$

untuk $|S| = 2$ dan $i \neq 1$, $1 \notin S$ dan $i \notin S$.

Diperoleh:

$$\begin{aligned} f(2, \{3, 4\}) &= \min\{c_{23} + f(3, \{4\}), c_{24} + f(4, \{3\})\} \\ &= \min\{9 + 20, 10 + 15\} \\ &= \min\{29, 25\} = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3, \{2, 4\}) &= \min\{c_{32} + f(2, \{4\}), c_{34} + f(4, \{2\})\} \\ &= \min\{13 + 18, 12 + 13\} \\ &= \min\{31, 25\} = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4, \{2, 3\}) &= \min\{c_{42} + f(2, \{3\}), c_{43} + f(3, \{2\})\} \\ &= \min\{8 + 15, 9 + 18\} \\ &= \min\{23, 27\} = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} f(1, \{2, 3, 4\}) &= \min\{c_{12} + f(2, \{3, 4\}), c_{13} + f(3, \{2, 4\}), \\ &\qquad c_{14} + f(4, \{2, 3\})\} \\ &= \min\{10 + 25, 15 + 25, 20 + 23\} \\ &= \min\{35, 40, 43\} = 35 \end{aligned}$$

Jadi, bobot tur yang berawal dan berakhir di simpul 1 adalah 35.

$$\begin{aligned} f(2, \{3, 4\}) &= \min\{c_{23} + f(3, \{4\}), c_{24} + f(4, \{3\})\} \\ &= \min\{9 + 20, 10 + 15\} \\ &= \min\{29, 25\} \quad = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3, \{2, 4\}) &= \min\{c_{32} + f(2, \{4\}), c_{34} + f(4, \{2\})\} \\ &= \min\{13 + 18, 12 + 13\} \\ &= \min\{31, 25\} \quad = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4, \{2, 3\}) &= \min\{c_{42} + f(2, \{3\}), c_{43} + f(3, \{2\})\} \\ &= \min\{8 + 15, 9 + 18\} \\ &= \min\{23, 27\} = 23 \end{aligned}$$

Konstruksi Solusi

- Misalkan $J(i, S)$ adalah nilai yang meminimumkan untuk mencapai simpul akhir. Maka, $J(1, \{2, 3, 4\}) = 2$. Jadi, tur mulai dari simpul 1 selanjutnya ke simpul 2.

$$
\begin{aligned}
f(1, \{2, 3, 4\}) &= \min\{\mathbf{c_{12} + f(2, \{3, 4\})}, c_{13} + f(3, \{2, 4\}), \\
&\qquad c_{14} + f(4, \{2, 3\})\} \\
&= \min\{\mathbf{10 + 25}, 15 + 25, 20 + 23\} \\
&= \min\{\mathbf{35}, 40, 43\} = \mathbf{35}
\end{aligned}
$$

- Simpul berikutnya dapat diperoleh dari $f(2, \{3, 4\})$, yang mana $J(2, \{3, 4\}) = 4$. Jadi, simpul berikutnya adalah simpul 4.

$$
\begin{aligned}
f(2, \{3, 4\}) &= \min\{c_{23} + f(3, \{4\}), \mathbf{c_{24} + f(4, \{3\})}\} \\
&= \min\{9 + 20, \mathbf{10 + 15}\} \\
&= \min\{29, \mathbf{25}\} \quad = \mathbf{25}
\end{aligned}
$$

- Simpul terakhir dapat diperoleh dari $f(4, \{3\})$, yang mana $J(4, \{3\}) = 3$.

$$f(4, \{3\}) = \min\{c_{43} + f(3, \varnothing)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$$

- Jadi, tur yang optimal adalah 1, 2, 4, 3, 1 dengan bobot (panjang) = 35.

SELAMAT BELAJAR