Program Dinamis (*Dynamic Programming*)

Bagian 2.1: Capital Budgeting

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Review Program Dinamis (PD)

- Metode pemecahan masalah dengan cara menguraikan solusi menjadi sekumpulan tahapan (*stage*) sehingga solusi dari persoalan dapat dipandang dari serangkaian keputusan yang saling berkaitan.
- Karakteristik persoalan: stage, state, transformasi hasil state antar stage, cost >>, rekursif keputusan terbaik k ke k+1, prinsip optimalitas
  - Prinsip optimalitas: jika solusi total optimal, maka bagian solusi sampai tahap ke-k juga optimal.
- Metode: def struktur solusi, def rekursif nilai solusi, kalkulasi, konstruksi solusi optimal
- Greedy: 1 rangkaian keputusan;
  Program Dinamis: > 1 rangkaian keputusan optimal

Persoalan 3: Penganggaran Modal (*Capital Budgeting*)

- Sebuah perusahaan berencana akan mengembangkan usaha (proyek) melalui ketiga buah pabrik (*plant*) yang dimilikinya.
- Setiap pabrik diminta mengirimkan proposal (boleh lebih dari satu) ke perusahaan untuk proyek yang akan dikembangkan.
- Setiap proposal memuat total biaya yang dibutuhkan (*c*) dan total keuntungan (*revenue*) yang akan diperoleh (*R*) dari pengembangan usaha itu. Perusahaan menganggarkan Rp 5 milyar untuk alokasi dana bagi ketiga pabriknya itu.

- Tabel berikut meringkaskan nilai *c* dan *R* untuk masing-masing proposal proyek.

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

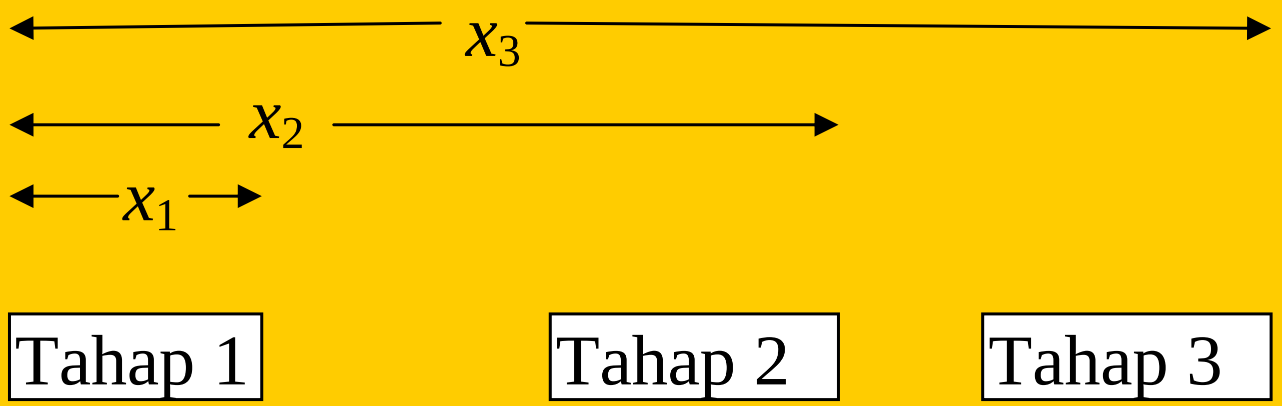
- Proposal proyek bernilai-nol sengaja dicantumkan yang berarti tidak ada alokasi dana yang diberikan untuk setiap pabrik.
- Tujuan Perusahaan adalah memperoleh keuntungan yang maksimum dari pengalokasian dana sebesar Rp 5 milyar tersebut.
- Selesaikan persoalan ini dengan program dinamis.

Penyelesaian dengan Program Dinamis

- Tahap (k) adalah proses mengalokasikan dana untuk setiap pabrik (ada 3 tahap, tiap pabrik mendefinisikan sebuah tahap).
- Status (x_k) menyatakan jumlah modal yang dialokasikan pada pada setiap tahap (namun terikat bersama semua tahap lainnya).
- Alternatif (p) menyatakan proposal proyek yang diusulkan setiap pabrik. Pabrik 1, 2, dan 3 masing-masing memiliki 3, 4 dan 2 alternatif proposal.

Peubah status yang terdapat pada tahap 1, 2, dan 3:

$x_1 = \sum$ modal yang dialokasikan pada tahap 1
$x_2 = \sum$ modal yang dialokasikan pada tahap 1 dan 2
$x_3 = \sum$ modal yang dialokasikan pada tahap 1, 2, dan 3



Kemungkinan nilai-nilai untuk x_1 dan x_2 adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5 (milyar), sedangkan nilai untuk x_3 adalah 5

Penyelesaian dengan Program Dinamis Maju.

Misalkan,

$R_k(p_k)$ = keuntungan dari alternatif p_k pada tahap k

$f_k(x_k)$ = keuntungan optimal dari tahap 1, 2, ..., dan k yang diberikan oleh status x_k

Relasi rekurens keuntungan optimal:

$$f_1(x_1) = \max_{\substack{feasible \\ proposal\_p_1}} \{R_1(p_1)\} \qquad \text{(basis)}$$

$$f_k(x_k) = \max_{\substack{feasible \\ proposal\_p_k}} \{R_k(p_k) + f_{k-1}(x_{k-1})\} \qquad \text{(rekurens)}$$

$$k = 2, 3$$

Catatan:

1. $x_{k-1} = x_k - c_k(p_k)$

   $c(p_k)$ adalah biaya untuk alternatif p_k pada tahap k.

2. Proposal p_k dikatakan layak (*feasible*) jika biayanya, $c(p_k)$, tidak melebihi nilai status x_k pada tahap k.

Relasi rekurens keuntungan optimal menjadi

$$f_1(x_1) = \max_{c_1(p_1) \le x_1} \{R_1(p_1)\} \qquad \text{(basis)}$$

$$f_k(x_k) = \max_{c_k(p_k) \le x_k} \{R_k(p_k) + f_{k-1}[x_k - c_k(p_k)]\} \qquad \text{(rekurens)}$$

$$k = 2, 3$$

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Tahap 1

$$f_1(x_1) = \max_{\substack{c_1(p_1)\le x_1 \\ p_1=1,2,3}} \{R_1(p_1)\}$$

x_1	$R_1(p_1)$			Solusi Optimal	
	$p_1 = 1$	$p_1 = 2$	$p_1 = 3$	$f_1(x_1)$	p_1^*
0	**0**	-	-	0	1
1	0	**5**	-	5	2
2	0	5	**6**	6	3
3	0	5	**6**	6	3
4	0	5	**6**	6	3
5	0	5	**6**	6	3

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

	$R_1(p_1)$			Solusi Optimal	
x_1	$p_1 = 1$	$p_1 = 2$	$p_1 = 3$	$f_1(x_1)$	p_1^*
0	**0**	-	-	0	1
1	0	**5**	-	5	2
2	0	5	**6**	6	3
3	0	5	**6**	6	3
4	0	5	**6**	6	3
5	0	5	**6**	6	3

Tahap 2

$$f_2(x_2) = \max_{\substack{c_2(p_2) \le x_2 \\ p_2 = 1,2,3,4}} \{R_2(p_2) + f_1[(x_2 - c_2(p_2))]\},$$

x_2	$R_2(p_2) + f_1[(x_2 - c_2(p_2))]$				Solusi Optimal	
	$p_2 = 1$	$p_2 = 2$	$p_2 = 3$	$p_2 = 4$	$f_2(x_2)$	p_2^*
0	0 + 0 = **0**	-	-	-	0	1
1	0 + 5 = **5**	-	-	-	5	1
2	0 + 6 = 6	8 + 0 = **8**	-	-	8	2
3	0 + 6 = 6	8 + 5 = **13**	9 + 0 = 9	-	13	2
4	0 + 6 = 6	8 + 6 = **14**	9 + 5 = **14**	12 + 0 = 12	14	2 atau 3
5	0 + 6 = 6	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15	12 + 5 = **17**	17	4

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

x_2	$R_2(p_2) + f_1[(x_2 - c_2(p_2))]$				Solusi Optimal	
	$p_2 = 1$	$p_2 = 2$	$p_2 = 3$	$p_2 = 4$	$f_2(x_2)$	p_2^*
0	0 + 0 = **0**	-	-	-	0	1
1	0 + 5 = **5**	-	-	-	5	1
2	0 + 6 = 6	8 + 0 = **8**	-	-	8	2
3	0 + 6 = 6	8 + 5 = **13**	9 + 0 = 9	-	13	2
4	0 + 6 = 6	8 + 6 = **14**	9 + 5 = **14**	12 + 0 = 12	14	2 atau 3
5	0 + 6 = 6	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15	12 + 5 = **17**	17	4

Tahap 3

$$f_3(x_3) = \max_{\substack{c_3(p_3) \le x_3 \\ p_3 = 1, 2}} \{R_3(p_3) + f_2[(x_3 - c_3(p_3)]\},$$

x_3	$R_3(p_3) + f_2[(x_3 - c_3(p_3)]$		Solusi Optimal	
	$p_3 = 1$	$p_3 = 2$	$f_3(x_3)$	p_3^*
5	0 + 17 = **17**	3 + 14 = **17**	17	1 atau 2

Rekonstruksi Solusi

	$R_3(p_3) + f_2[(x_3 - c_3(p_3))]$		Solusi Optimal	
x_3	$p_3 = 1$	$p_3 = 2$	$f_3(x_3)$	p_3^*
5	0 + 17 = **17**	3 + 14 = **17**	17	1 atau 2

	$R_2(p_2) + f_1[(x_2 - c_2(p_2))]$				Solusi Optimal	
x_2	$p_2 = 1$	$p_2 = 2$	$p_2 = 3$	$p_2 = 4$	$f_2(x_2)$	p_2^*
0	0 + 0 = **0**	-	-	-	0	1
1	0 + 5 = **5**	-	-	-	5	1
2	0 + 6 = 6	8 + 0 = **8**	-	-	8	2
3	0 + 6 = 6	8 + 5 = **13**	9 + 0 = 9	-	13	2
4	0 + 6 = 6	8 + 6 = **14**	9 + 5 = **14**	12 + 0 = 12	14	2 atau 3
5	0 + 6 = 6	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15	12 + 5 = **17**	17	4

	$R_1(p_1)$			Solusi Optimal	
x_1	$p_1 = 1$	$p_1 = 2$	$p_1 = 3$	$f_1(x_1)$	p_1^*
0	**0**	-	-	0	1
1	0	**5**	-	5	2
2	0	5	**6**	6	3
3	0	5	**6**	6	3
4	0	5	**6**	6	3
5	0	5	**6**	6	3

Rekonstruksi solusi:

x_3	p_3^*	x_2	p_2^*	x_1	p_1^*	(p_1^*, p_2^*, p_3^*)
1	1 →	(5 – 0 = 5) →	4 →	(5 – 4 = 1) →	2	(2, 4, 1)
			2 →	(4 – 2 = 2) →	3	(3, 2, 2)
	2 →	(5 – 1 = 4)				
			3 →	(4 – 3 = 1) →	3	(2, 3, 2)

SELAMAT BELAJAR