Algoritma Divide and Conquer Untuk Menghitung Percepatan Gravitasi Planet

Neo Enriko/13507104

Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi Bandung
Jalan Ganesha No 10, Bandung 40132
e-mail: if17104@students.if.itb.ac.id, enriko_neo@yahoo.co.id

ABSTRAK

Perhitungan percepatan gravitasi sebuah planet sudah dikembangkan sedemikian rupa untuk mendapatkan hasil perhitungan yang akurat. Walaupun perkembangan teknologi komputer memungkinkan untuk menghitung percepatan gravitasi sebuah planet dengan menggunakan rumus rumit yang sudah ada, tantangan untuk mengembangkan algoritma dari komputasi tersebut masih terbuka. Sampai saat ini sulit untuk menghitung percepatan gravitasi sebuah planet atau bumi dengan tingkat ketelitian yang tinggi. Kita memerlukan data yang tingkat kesalahannya rendah dan peritungan yang menghasilkan perhitungan dengan tingkat ketelitian yang tinggi. Pada makalah ini akan dijelaskan metode penghitungan percepatan gravitasi planet dengan menggunakan algoritma divide and conquer. Dengan menggunakan algoritma ini, kita bisa menghitung percepatan gravitasi planet dengan tingkat ketelitian yang kita tentukan sendiri.

Kata kunci: Percepatan gravitasi, algoritma *Divide and Conquer*, planet, massa jenis heterogen.

1. PENDAHULUAN

Komputasi yang dibahas dalam makalah ini adalah penyelesaian algoritmik untuk perhitungan percepatan gravitasi pada sebuah planet. Sebuah planet memiliki kerapatan yang berbeda-beda pada setiap bagiannya. Perhitungan percepatan gravitasi dipengaruhi oleh massa jenis planet tersebut.

Perhitungan percepatan gravitasi yang ada saat ini, mempunyai beberapa asumsi dan batasan-batasan dalam perhitungannya. Asumsi dan batasan yang dibuat mempengaruhi tingkat kesalahan dalam perhitungan.

Formula Newtonian untuk menghitung percepatan gravitasi sebuah planet adalah:

$$a = G \iint \rho \, dV \, r \, dr \qquad (1)$$

a = percepatan gravitasi (m/s^2)
G = konstanta gravitasi (m^3/kg.s^2)
ρ = massa jenis bumi (kg/m^3)
r = jarak massa ke pusat bumi

Persamaan diatas menjelaskan bahwa percepatan gravitasi dipengaruhi oleh massa jenis bumi dibagian tertentu dengan jarak tertentu dan dengan ruang atau volume tertentu. Dalam perhitungannya, kita membagi-bagi sebuah planet kedalam bagian yang sama besarnya. Diasumsikan bahwa planet yang akan kita hitung percepatan gravitasinya adalah bulat.

Algoritma divide and conquer yang diterapkan pada perhitungan ini adalah untuk memecah permasalahan besar menjadi bagian yang kecil, lalu menyelesaikannya dan mengabungkannya.

Dalam perhitungan percepatan gravitasi, planet kita pecah-pecah dalam 3 dimensi dengan ukuran pembagian yang identik. Semakin kecil partisinya, semakin teliti hasil pehitungan kita. Setiap massa yang ada pada planet berperan dalam pengahsil percepatan gravitasi.

Algoritma divide and conquer bisa digunakan untuk melakukan perhitungan. Pada awalnya kita tentukan jumlah partisi yang akan kita buat. Kita tentukan dulu seberapa luas bidang partisi yang akan kita buat sehingga kita bisa tahu jumlah partisi yang harus dibuat.

Setelah dibuat partisinya, lalu dihitung percepatan gravitasi yang dihasilkan oleh partisi tersebut, lalu semuanya dijumlahkan.

Semakin kecil partisi yang kita buat, maka semakin banyak data massa jenis yang harus kita miliki, dan semakin tinggi ketelitian perhitungan.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Percepatan Gravitasi Planet

Di dalam alam semesta dengan n-dimensi ruang, percepatan gravitasi Newton dari sebuah titik-massa adalah berbanding lurus dengan Massa dari titik-massa tersebut dan berbanding terbalik dengan pangkat n-1 dari jarak titik-massa.

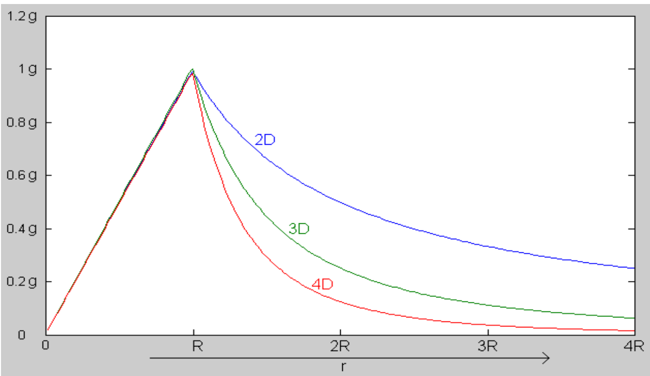
$$a = G \iint \rho \, dV \, r \, dr \qquad (1)$$

a = percepatan gravitasi (m/s^2)
G = konstanta gravitasi (m^3/kg.s^2)
ρ = massa jenis bumi (kg/m^3)
r = jarak massa ke pusat bumi

Tabel 1 Persamaan Gravitasi

Hypervolume Bola berdimensi - N (R = jari-jari bola berdimensi N)	Massa Jenis	Luas Permukaan Bola berdimensi N	Gravitasi per unit luas	Gravitasi dari Objek Bola Homogen berdimensi N (r = jarak dari pusat bola berdimensi N)
$V_n(R)=\int_{-R}^{R} V_{n-1}(\sqrt{R^2-x^2})\,dx$	$\rho_n=\frac{Mass}{V_n(R)}$	*Untuk n ganjil :* $S_n(R)=\frac{2\pi^{\left(\frac{n}{2}\right)}R^n}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!}$ *Untuk n genap :* $S_n(R)=\frac{2^{\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}\pi^{\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}R^n}{(n-2)!!}$	$\mu_n(r,x,y)=\frac{G\rho_n(r+y)S_{n-1}(x)}{((r+y)^2+x^2)^{\left(\frac{n}{2}\right)}}$	$g_n(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\mu_n(r,x,y)\,dx\,dy$
$V_2(R)=\int_{-R}^{R}2\sqrt{R^2-x^2}\,dx=R^2\pi$	$\rho_2=\frac{Mass}{R^2\pi}$	$S_2(R)=2\pi R$	$\mu_2(r,x,y)=\frac{2\,G\,Mass\,(r+y)}{\pi R^2((r+y)^2+x^2)}$	$g_2(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{2\,G\,Mass\,(r+y)}{R^2\pi((r+y)^2+x^2)}\,dx\,dy$
$V_3(R)=\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\pi\,dx=\frac{4\pi R^3}{3}$	$\rho_3=\frac{3\,Mass}{4\pi R^3}$	$S_3(R)=4\pi R^2$	$\mu_3(r,x,y)=\frac{3\,G\,Mass\,(r+y)\,x}{2R^3((r+y)^2+x^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$	$g_3(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{3\,G\,Mass\,(r+y)\,x}{2R^3((r+y)^2+x^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}\,dx\,dy$
$V_4(R)=\int_{-R}^{R}\frac{4\pi(R^2-x^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{3}\,dx=\frac{\pi^2R^4}{2}$	$\rho_4=\frac{2\,Mass}{\pi^2R^4}$	$S_4(R)=2\pi^2R^3$	$\mu_4(r,x,y)=\frac{8\,G\,Mass\,(r+y)\,x^2}{\pi R^4((r+y)^2+x^2)^2}$	$g_4(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{8\,G\,Mass\,(r+y)\,x^2}{\pi R^4((r+y)^2+x^2)^2}\,dx\,dy$
$V_5(R)=\int_{-R}^{R}\frac{\pi^2(R^2-x^2)^2}{2}\,dx=\frac{8\pi^2R^5}{15}$	$\rho_5=\frac{15\,Mass}{8\pi^2R^5}$	$S_5(R)=\frac{8\pi^2R^4}{3}$	$\mu_5(r,x,y)=\frac{15\,G\,Mass\,(r+y)\,x^3}{4R^5((r+y)^2+x^2)^{\left(\frac{5}{2}\right)}}$	$g_5(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{15\,G\,Mass\,(r+y)\,x^3}{4R^5((r+y)^2+x^2)^{\left(\frac{5}{2}\right)}}\,dx\,dy$
$V_6(R)=\int_{-R}^{R}\frac{8\pi^2(R^2-x^2)^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{15}\,dx=\frac{\pi^3R^6}{6}$	$\rho_6=\frac{6\,Mass}{\pi^3R^6}$	$S_6(R)=\pi^3R^5$	$\mu_6(r,x,y)=\frac{16\,G\,Mass\,(r+y)\,x^4}{\pi R^6((r+y)^2+x^2)^3}$	$g_6(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{16\,G\,Mass\,(r+y)\,x^4}{\pi R^6((r+y)^2+x^2)^3}\,dx\,dy$
$V_7(R)=\int_{-R}^{R}\frac{\pi^3(R^2-x^2)^3}{6}\,dx=\frac{16\pi^3R^7}{105}$	$\rho_7=\frac{105\,Mass}{16\pi^3R^7}$	$S_7(R)=\frac{16\pi^3R^6}{15}$	$\mu_7(r,x,y)=\frac{105\,G\,Mass\,(r+y)\,x^5}{16R^7((r+y)^2+x^2)^{\left(\frac{7}{2}\right)}}$	$g_7(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{105\,G\,Mass\,(r+y)\,x^5}{16R^7((r+y)^2+x^2)^{\left(\frac{7}{2}\right)}}\,dx\,dy$
$V_8(R)=\int_{-R}^{R}\frac{16\pi^3(R^2-x^2)^{\left(\frac{7}{2}\right)}}{105}\,dx=\frac{\pi^4R^8}{24}$	$\rho_8=\frac{24\,Mass}{\pi^4R^8}$	$S_8(R)=\frac{\pi^4R^7}{3}$	$\mu_8(r,x,y)=\frac{128\,G\,Mass\,(r+y)\,x^6}{5\pi R^8((r+y)^2+x^2)^4}$	$g_8(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{128\,G\,Mass\,(r+y)\,x^6}{5\pi R^8((r+y)^2+x^2)^4}\,dx\,dy$
$V_9(R)=\int_{-R}^{R}\frac{\pi^4(R^2-x^2)^4}{24}\,dx=\frac{32\pi^4R^9}{945}$	$\rho_9=\frac{945\,Mass}{32\pi^4R^9}$	$S_9(R)=\frac{32\pi^4R^8}{105}$	$\mu_9(r,x,y)=\frac{315\,G\,Mass\,(r+y)\,x^7}{32R^9((r+y)^2+x^2)^{\left(\frac{9}{2}\right)}}$	$g_9(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{315\,G\,Mass\,(r+y)\,x^7}{32R^9((r+y)^2+x^2)^{\left(\frac{9}{2}\right)}}\,dx\,dy$
$V_{10}(R)=\int_{-R}^{R}\frac{32\pi^4(R^2-x^2)^{\left(\frac{9}{2}\right)}}{945}\,dx=\frac{\pi^5R^{10}}{120}$	$\rho_{10}=\frac{120\,Mass}{\pi^5R^{10}}$	$S_{10}(R)=\frac{\pi^5R^9}{12}$	$\mu_{10}(r,x,y)=\frac{256\,G\,Mass\,(r+y)\,x^8}{7\pi R^{10}((r+y)^2+x^2)^5}$	$g_{10}(r)=\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{256\,G\,Mass\,(r+y)\,x^8}{7\pi R^{10}((r+y)^2+x^2)^5}\,dx\,dy$

Dengan menggunakan formula dari tabel di atas, dapat dibuat sebuah program aplikasi sederhana untuk memplot fungsi percepatan gravitasi (g) terhadap jarak dari titik pusat bola berdimensi N (r). Gambar di bawah ini adalah hasil plot untuk 2-dimensi, 3-dimensi dan 4-dimensi.



Gambar 1 Plot g terhadap jari-jari planet

Hasil plot di atas menunjukkan dua hal penting. Pertama, di luar dari objek bola berdimensi N percepatan gravitasi berbanding terbalik dengan pangkat n-1 dari jarak ke titik pusat bola. Kedua di dalam bola berdimensi N, percepatan gravitasi berbanding lurus dengan jarak dari titik pusat bola danberbanding terbalik dengan pangkat n-1 dari radius bola tersebut.

Perhitungan percepatan gravitasi planet yang heterogen membutuhkan data massa jenis sebanyak partisi yang akan kita buat pada penerapan algoritmanya. Massa jenis bisa kita tuliskan sebagai fungsi, ρ(x, y, r). x = bujur, y = lintang, r = jarak ke pusat planet.a

Dengan perhitungan integral yang berarti penjumlahan dari setiap percepatan yang dihasilkan oleh massa, kita dapat menemukan percepatan gravitasi total yang dihasilkan oleh planet yang terdiri dari massa jenis yang berbeda disetiap bagiannya.

2.2 Algoritma Divide and Conquer

Divide and Conquer adalah metode pemecahan masalah yang bekerja dengan membagi masalah menjadi beberapa upa-masalah yang lebih kecil, kemudian menyelesaikan masing-masing upa-masalah tersebut secara independen, dan akhirnya menggabungkan solusi masing-masing upamasalah sehingga menjadi solusi dari masalah semula.

Pada algortima *Divide and Conquer* ini meiliki tiga proses utama yaitu:

- *Divide*: membagi masalah menjadi beberapa upamasalah yang memiliki kemiripan dengan masalah semula namun berukuran lebih kecil (idealnya berukuran hampir sama),
- *Conquer*: memecahkan (menyelesaikan) masingmasing upa-masalah (secara rekursif), dan
- *Combine:* mengabungkan solusi masing-masing upa-masalah sehingga membentuk solusi masalah semula.

Pada algoritma ini, tiap-tiap upa-masalah mempunyai karakteristik yang sama (*the same type*) dengan karakteristik masalah asal, sehingga metode *Divide and Conquer* lebih natural diungkapkan dalam skema rekursif. Secara umum, algoritma *Divide and Conquer* memiliki sekema sbb:

```
procedure DIVIDE_and_CONQUER(input n :
integer)
{ Menyelesaikan masalah dengan
algoritma Dand-
C.
Masukan: masukan yang berukuran n
Keluaran: solusi dari masalah semula
}
Deklarasi
r, k : integer
Algoritma
if n ≤ n0 then {ukuran masalah sudah
cukup
kecil }
SOLVE upa-masalah yang berukuran n ini
else
```

```
Bagi menjadi r upa-masalah, masingmasing
berukuran n/k
for masing-masing dari r upa-masalah do
DIVIDE_and_CONQUER(n/k)
endfor
COMBINE solusi dari r upa-masalah
menjadi solusi masalah semula }
endif
```

III. METODE PEMECAHAN MASALAH

Algoritma divide and conquer menjawab tantangan untuk menghitung percepepatan gravitasi planet bermassa jenis heterogen. Tercantum pada tabel 1, proses pengintegralan untuk mendapatkan percepatan graviatasi merupakan penjumlahan dari partisi-partisi yang dibuat sekecil mungkin pada planet homogen. Lalu hasilnya dijumlahkan, ini adalah proses *divide*, lalu *conquer*.

Persamaan (1) adalah persamaan umum newton utuk menghitung percepatan gravitasi planet. Tabel 1 adalah persamaan khusus untuk menghitung percepatan gravitasi planet.

Sekarang penulis memodifikasi persamaan pada tabel 1 diatas agar bisa digunakan untuk perhitungan percepatan gravitasi planet heterogen. Yaitu dengan mengganti ρ pada persamaan (1) yang awalnya adalah konstanta tetap menjadi sebuah fungsi massa jenis yang parameternya adalah koordinat area partisi.

3.1 Massa jenis sebagai sebuah fungsi

Diperlukan data massa jenis sebayak partisi yang dibuat. Dalam persamaan 1, dV bisa dijabarkan menjadi $dV = dx.dy.dr$.

$a = G \iint \rho(x, y, r)\, dV\, r\, dr$

massa jenis dapat dituliskan sebagia sebuah fungsi yang memiliki parameter x, y sebagai koordinat, r sebagai jarak ke pusat planet.

Massa jenis harus didefenisikan terlebih dahulu untuk setiap partisi. Massa jenis didapat dari data lapangan. Jadi saat fungsi ρ dipanggil, dia telah akan mengembalikan nilai massa jenis yang disimpan berdasarkan koordinat dan jarak ke pusat bumi.

Jadi ada dua fungsi yang terkait dengan massa jenis. Pertama adalah prosedur:

`void simpan_ρ(double x, double y, double r, double massajenis);`

Fungsi ini menyimpan informasi massa jenis dengan jumlah informasi sebanyak jumlah partisi yang akan dihitung.

Kedua adalah fungsi:

`double ρ(double x, double y, double mjenis);`

Fungsi ini memanggil data massa jenis yang dipanggil dengan parameter koordinat dan jarak partisi ke pusat planet.

3.2 Menghitung percepatan gravitasi bumi dengan Algoritma Divide and Conquer

Penghitungan percepatan gravitasi planet dengan menggunakan algoritma divide and conquer adalah cara untuk menyederhanakan komputasi yang dilakukan computer. Menghitung percepatan gravitasi planet heterogen dengan komputasi biasa akan membutuhkan waktu yang lebih lama.

Berikut ini adalah garis besar yang menggambarkan algoritmanya:

- Pertama tentukan dulu luas area partisi dan jumlah partisi yang akan dibuat.
- Masukkan data massa jenis tiap area dengan menggunakan prosedur : `void simpan_ρ(double x, double y, double r, double massajenis);`
- Jika partisi lebih kecil atau sama dengan area partisi yang ditetapkan diawal, maka *solve.* (basis)
- Jika partisi masih lebih besar dari pada yang sudah ditetapkan diawal, maka pecah area menjadi dua bagian. Catatan: koordinat yang dipakai adalah koordinat kartesian.(rekurens)
- Lakukan penggabungan setelah semua partisi di *solve*.

Berikut adalah pseudo code yang penulis buat sendiri untuk algoritmanya:

```
procedure Grav (input rtot:
long,ρ:double,r:double, dV:double,
P:Koordinat Output Hasil: long)
{ Menyelesaikan masalah perhitungan
percepatan gravitasi dengan algoritma D-
and-C.
Masukan: rtot adalah jari-jari planet, ρ
adalah massa jenis planet, r adalah
jarak partisi ke pusat planet, dV adalah
volume total planet
Keluaran: solusi dari masalah
}
Deklarasi
Algoritma
if n ≤ x then {ukuran masalah sudah
cukup kecil, x }
SOLVE upa-masalah dengan metode
bruteforce { mengalikan G, dV(P), ρ(x,
y, r) lalu membagi dengan r^2}
else
Bagi menjadi r upa-masalah, masing-
masing
berukuran n/k
a1 = P[1..n/2]
a2 = P[n/2+1..n]
Grav(a1)
Grav(b2)
{gabungkan solusi dari r upa-masalah
menjadi solusi masalah semula, yaitu
dengan menjumlahkannya }
Hasil = prosedur gabung a1 dan b1
endif
```

Pada intinya, setiap komponen massa pada sebuah planet memiliki andil dalam menghasilkan percepatan gravitasinya. Hubungan tiap massa tersebu yaitu, $a = G.\rho.dV/r^2$. (P.dV) merupakan massa suatu komponennya. Untuk menghitung percepatan keseluruhan, maka algoritma divide and conquer memecah masalahnya, jadi akurasi perhitungannya jadi lebih tinggi. Komputasi yang dilakukan lebih efisien dan akurat.

Setiap partisi dengan volume yang sama (karena partisi berdasarkan volume) menghasilkan percepatan yang berbeda. Berdasarkan algoritma diatas, perhitungan dilakukan pada level partisi, lalu hasilnya dijumlahkan unutk mendapatkan hasil total.

IV. KESIMPULAN

Masalah perhitungan percepatan gravitasi planet yang bermassa heterogen lumayan rumit untuk dipecahkan tanpa bantuan komputasi. Sebab, jika menghitung secara manual, maka akan sulit untuk menghitungnya karena kita butuh perhitungan yang presisi. Partisi dilakukan sebanyak-banyaknya, sehingga sulit untuk kita menghitung secara manual.

Algoritma divide and conquer mempermudah untuk melakukan perhitugan. Algoritma ini sangat membantu jika kita membuat partisi yang sangat kecil. Tingkat ketelitiannya menjadi lebih tinggi. Tanpa bantuan algoritma ini, akan susah menghitung percepatan gravitasi planet yang bermassa heterogen.

REFERENSI

[1] Munir, Rinaldi. 2007. *Strategi Algoritmik*. Teknik Informatika ITB : Bandung.

[2]http://www.batan.go.id/ppin/lokakarya/LKS1/slamet.pdf

[3]Halliday, Resnick. 2007. *Fundamental of Physics*, John Willey and Son:USA

[4]http://orinetz.com/blog/viewblogentry.php?specific=NZW4T8RSSSSB0JRFILY43Z61Q